UNTERSUCHUNGEN

ÜBER DEN

EINFLUSS DER RÄUMLICHEN BEWEGUNG DES SONNENSYSTEMS

AUF DIE

VERTHEILUNG DER NACHWEISBAREN METEORBAHNEN

VON

PROF. G. v. NIESSL

IN BRÜNN.

(Mit 3 Textfiguren.)

(VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 7. FEBRUAR 1895.)

Bekanntlich befinden sich die scheinbaren Strahlungspunkte der Meteore häufiger auf jener Hälfte des Himmelsgewölbes, deren Pol der jeweilige Apex der Erdbewegung bildet, als in der entgegengesetzten. Diese Thatsache, welche mit der kosmischen Theorie völlig im Einklange steht, liefert eines der wichtigsten und unumstösslichsten Argumente gegen alle jene ältern Annahmen, die den Ursprung der Sternschnuppen und verwandten Erscheinungen in der Atmosphäre der Erde gesucht haben.

Wenn nunmehr einerseits alle Zweifel darüber ausgeschlossen sind, dass diese Körper zum mindesten aus den fernsten planetarischen Regionen zur Erde gelangen, so haben andererseits schon einzelne ältere, insbesondere aber viele neuere Ausmittlungen der Geschwindigkeiten correspondirend beobachteter Meteore es höchst wahrscheinlich gemacht, dass zahlreiche Körper dieser Art ursprünglich nicht einmal dem Sonnensystem angehört haben können, sondern erst aus dem Weltraume in dasselbe gelangt sind. Es ist mir selbst im Laufe einer Reihe von Jahren nicht allein gelungen mehrfache sichere Belege für das Vorhandensein ausgeprägt hyperbolischer Bahnen zu erbringen, sondern ich habe auch wiederholt darauf hingewiesen, dass eigenthümliche Beziehungen, welche zwischen manchen Radiationspunkten zu herrschen scheinen, zur Annahme des Vorhandenseins ausgedehnter Meteorströme im Weltraume führen.

In den letzten Jahren hat nun eine allerdings vorhandene, aber vielfach missverstandene Analogie zu dem früher erwähnten Verhalten der scheinbaren Radianten gegen den Erdapex Manche verleitet, aus der Vertheilung derselben einen anscheinend gewichtigen Einwurf gegen die angeführte Anschauung von der stellaren Abkunft vieler Meteore zu folgern. Man hat geschlossen: Weil die Weiterbewegung der Erde eine Anhäufung der Radiationspunkte in der Gegend des Erdapex mit sich bringt, so müsste, wenn die Meteore von aussen her in das Sonnensystem kämen, auch eine analoge Verdichtung der Strahlungspunkte um denjenigen Punkt stattfinden, gegen welchen das Sonnensystem im Weltraume sich bewegt, also um den Apex der Sonnenbewegung. Eine solche erscheine aber nicht nachgewiesen.[1]

[1] Beispielsweise kann folgende Bemerkung des Herrn Dr. Alexis de Tillo angeführt werden, welche sich in dessen »Recherches sur la répartition des points radiants etc.« (Bulletin astronomique 1888, S. 19 des Abdruckes) findet: »En examinant la réparti-

Solche und ähnliche Schlussfolgerungen beruhen jedoch auf einer unvollständigen Erfassung und sehr ungenauen Analyse des Problems. Ich will zunächst ganz davon absehen, dass die Analogie schon deshalb nicht völlig zutreffend ist, weil wir bezüglich der Erde die jeweilige Richtung und Grösse der Bewegung ganz genau kennen, während dies hinsichtlich der Sonne noch durchaus nicht so sicher der Fall ist. Dagegen kann schon hier die Bemerkung nicht übergangen werden, dass die Richtung, in welcher die Körper in das Sonnensystem gelangen (bestimmt durch die kosmischen Ausgangspunkte) und die Richtung, in welcher sie gegen die Erde kommen (scheinbare Radiation) zweierlei ganz verschiedene Begriffe sind. Was von den Einen angenommen werden kann, gilt nicht immer von den Andern. Die Radiationspunkte befinden sich im Allgemeinen weit von den Ausgangspunkten. Bei der parabolischen Bewegung kann beispielsweise schon der wahre Radiant um einen vollen Quadranten von der Richtung zum Aphel entfernt sein.

Es lässt sich, ganz im Gegensatze zur oben erwähnten irrthümlichen Meinung, Folgendes mit voller Bestimmtheit aussprechen: Wenn alle Meteore aus dem Weltraum der Sonne direct entgegen kommen würden, also alle kosmischen Ausgangspunkte am Apex der Sonne vereinigt wären, so könnten sich an diesem Platze des Himmels gar keine Radianten befinden. Dieselben wären vielmehr — unter jeder wahrscheinlichen Annahme für die Geschwindigkeit — stets in ansehnlicher Entfernung vom Sonnenapex, und zwar für jede besondere Geschwindigkeit an einem anderen, von der Lage der Erde in ihrer Bahn abhängigen, also nach einer jährlichen Periode veränderlichen Orte angesammelt.

Geht man von diesem Grenzfalle zu Voraussetzungen über, welche den wirklichen Verhältnissen näher liegen, indem man annimmt, dass die Bahnen nach irgend einem, mit der Entfernung vom Apex der Sonne zusammenhängenden Gesetze verdichtet sind, so entscheidet erst die besondere Form dieser Dichtigkeitsfunction, ob der für das ganze Jahr resultirende Zustand ein Vorwalten der Radianten in der Gegend des Sonnenapex ergeben kann oder nicht.

Es geht schon aus diesen wenigen Bemerkungen hervor, dass Schlüsse, welche nur auf beiläufige Vorstellungen von dem Zusammenhange der in Frage kommenden Factoren beruhen, hier ganz besonders leicht zu Irrthümern führen können. Aber selbst die sorgfältigste Analyse der Umstände, durch welche die Dichtigkeitsverhältnisse der Bahnen an den Grenzen des Sonnensystems bedingt sind, wäre noch unvollständig, ohne Berücksichtigung der Wahrscheinlichkeit des Vorkommens solcher Bahnen, deren Periheldistanz nicht grösser ist, als die Entfernung der Erde von der Sonne. Denn für alle andern ist die Möglichkeit des Zusammentreffens mit der Erde offenbar ausgeschlossen. Diese Wahrscheinlichkeit wird aber erheblich grösser, je kleiner die relative oder heliocentrische Geschwindigkeit ist. Da nun, unter sonst gleichen Annahmen in Bezug auf die absoluten, räumlichen Geschwindigkeiten, diejenigen Körper, welche in ihren ursprünglichen Bahnen der Sonne entgegen kommen, selbstverständlich eine grössere heliocentrische Geschwindigkeit erlangen müssen, als die in gleicher Richtung mit ihr sich bewegenden, so ist im Allgemeinen die Wahrscheinlichkeit, dass Erstere in unsere Beobachtungssphäre gelangen, geringer als für die Letzteren.

Wenn also auch in sehr grosser Entfernung von der Sonne die Meteorbahnen wirklich wesentlich dichter angeordnet sind nach jener Richtung, gegen welche das Sonnensystem sich bewegt, was übrigens nicht unbedingt in der Natur der Sache liegt, so sind in der Entfernung Eins von der Sonne diese Verhältnisse, wenigstens dem Grade nach, doch nicht mehr die gleichen. Es geht daher auch aus diesem Grunde nicht an, aus der Verdichtung der Ausgangspunkte direct auf die Verdichtung der Radiationspunkte zu schliessen.

Will man trotz der Unvollständigkeit des vorliegenden Beobachtungsmateriales — welches uns z. B. über die südliche Hemisphäre nur sehr dürftige Aufschlüsse liefert — den Versuch wagen, aus der Vertheilung der Strahlungspunkte Schlüsse allgemeiner Art auf die Herkunft der die Meteorerscheinung

---

tion des radiants, on n'aperçoit pas d'agglomération dans la région qui environne l'étoile ρ d'Hercule. Il n'y a donc pas d'indice qu'un plus grand nombre d'étoiles filantes nous arrivent du point vers lequel se meut notre système solaire.«

erzeugenden Körper zu ziehen, so hat man der Reihe nach sich mit folgenden Untersuchungen zu befassen:

1. Unter verschiedenen Voraussetzungen über die ursprüngliche Bewegung ist die Vertheilung der heliocentrischen Bahnen für sehr grosse Entfernung von der Sonne darzustellen und dabei auf die Wahrscheinlichkeit der nöthigen kleinen Periheldistanzen Rücksicht zu nehmen.

2. Hieraus ist die Vertheilung der scheinbaren Radianten für verschiedene Hypothesen über die grossen Axen zu entwickeln.

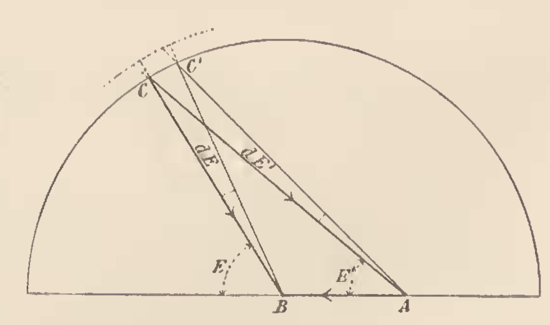
3. Erst mit diesen Resultaten wären die Ergebnisse der Erfahrung zu vergleichen. Dabei dürfte aber nicht unterlassen werden, die zahlreichen übrigen Umstände in Betracht zu ziehen, durch welche die Vertheilung der Raditionspunkte beeinflusst wird.

Die folgenden Betrachtungen sind allein dem ersten Theile dieser Aufgabe gewidmet. Die beiden anderen Untersuchungen lassen sich vorerst nur in grossen Zügen durchführen. Soweit dies möglich ist, sind sie ebenfalls bereits abgeschlossen und ihr Ergebniss soll demnächst mitgetheilt werden, doch möchte ich mir schon vorläufig gestatten, dasselbe mit einigen Worten anzuzeigen.

Die hier folgenden Betrachtungen gelangen zu dem Resultate, dass der Nachweis einer Verdichtung der Meteorbahnen gegen den Apex der Sonnenbewegung allerdings ein nicht leicht zu beseitigendes Argument für den stellaren — also ausserplanetarischen — Ursprung der betreffenden Körper darstellt, dass jedoch aus dem Gegentheile durchaus nichts im negativen Sinne gefolgert werden könnte. Soweit nun das vorhandene Beobachtungsmaterial Schlüsse gestattet, lässt es sich kaum bezweifeln, dass die Zahl der kosmischen Ausgangspunkte grösser ist auf jener Hemisphäre, deren Pol im Bereiche der verschiedenen Annahmen über den Sonnenapex liegt, als auf der entgegengesetzten.

I.

Es wird hier angenommen, dass sich das Sonnensystem im Weltraume mit der Geschwindigkeit u weiterbewegt, welche der Grösse und Richtung nach durch AB dargestellt sei. B befinde sich in so grosser Entfernung von der Sonne, dass darüber hinaus ihr Einfluss auf die Bewegung der benachbarten Körper unmerklich wird. Es ist dies also, wie man zu sagen pflegt, »die Grenze der solaren Attractionssphäre«. Laplace nimmt bei ähnlichen Betrachtungen für diese Entfernung beispielsweise den Betrag 100000 in der üblichen Einheit. Es ändert nur Unbedeutendes, wenn man diesen Werth etwas grösser oder kleiner nimmt; wir wollen ihn daher, soferne es nöthig ist einen bestimmten Betrag anzunehmen, ebenfalls beibehalten.



Die ursprüngliche räumliche Geschwindigkeit der in Betracht kommenden kleinen Weltkörper heisse c und werde durch CB dargestellt. Ihre Bewegungsrichtung bilde mit jener der Sonne den Winkel E. Dieser Winkel soll von der Richtung aus gezählt werden, gegen welche sich das Sonnensystem bewegt. Wir heissen dann E die absolute Elongation des Bahnstückes CB vom Sonnenapex.

Durch Zusammensetzung der Grössen und Richtungen c und u erhält man die relative oder heliocentrische Geschwindigkeit v (in der grossen Entfernung $r = 100.000$), mit welcher der Körper sich in der Richtung CA gegen die Sonne bewegt. Der Winkel, welchen diese mit dem Apex bildet, E', möge die relative oder heliocentrische Elongation heissen.

Die Grössen E und E' beziehen sich offenbar auf die ganze Mantelfläche zweier Kegel, deren Axe AB ist und deren Öffnungswinkel diesen beiden Elongationen entsprechen. Es ist für die folgenden Betrachtungen überflüssig, von allen möglichen Richtungen, welche auf den Mantelflächen dieser zusammengehörigen Kegel liegen, irgend eine und die zugehörige andere besonders hervorzuheben, denn es gilt

immer Alles gleichzeitig für alle Richtungen, welche auf dem einen, und die zugehörigen, welche auf dem anderen Kegel liegen. Wichtig ist es nur hervorzuheben, dass die AC den sogenannten »kosmischen Ausgangspunkt« bestimmt, wenn aus allen auf dem Kegelmantel liegenden Richtungen irgend eine ausgewählt und am Himmel durch die entsprechenden Coordinanten fixirt wird. Da AC nur der relativen Richtung entgegengesetzt ist, so gibt sie eigentlich auch nicht den wahren Ausgangspunkt, sondern dieser ist durch die absolute Richtung BC bestimmt.

Beobachtungen, welche hinreichen die Elemente einer Meteorbahn aufzusuchen, lassen direct auch den Schluss auf die Lage des kosmischen Ausgangspunktes im ersteren, also relativen Sinne zu. Um dagegen dessen wahre Lage anzugeben, müsste man Richtung und Grösse der Sonnenbewegung genauer kennen als dies wirklich der Fall ist. Unter der Bezeichnung »kosmischer Ausgangspunkt« ist daher hier, wie in allen meinen früheren Arbeiten, immer die relative oder heliocentrische Lage gemeint, und diese kommt auch bei vorliegender Betrachtung wesentlich in Frage.

Es wurde schon bemerkt, dass v für einen sehr grossen Radiusvector r gilt. Die Geschwindigkeit für $r=1$ heisse V. Ist nun a die dieser Bahn zugehörige grosse Halbaxe, so bestehen bekanntlich folgende Beziehungen, unter Voraussetzung der gebräuchlichen Einheiten:

$$\text{1.} \quad \left\{ \begin{array}{ll} v=\sqrt{\frac{2}{r}-\frac{1}{a}} & a=\frac{r}{2-rv^2} \text{ und wegen} \\ V=\sqrt{2-\frac{1}{a}} \text{ auch } & V=\sqrt{v^2+2-\frac{2}{r}}. \end{array} \right.$$

Für den obigen grossen Werth von r kann in vielen Fällen, wenn nämlich v nicht verschwindend klein ist, auch

$$a=-\frac{1}{v^2} \text{ und } V=\sqrt{v^2+2}$$

genommen werden, wobei nur mehr Hyperbeln in Betracht kommen. Für die strenge Parabel ist $a=\infty$ also $v^2=\frac{2}{r}$.

Von diesen Beziehungen wird später Gebrauch gemacht werden.

Nun wird es nothwendig sein, die Vertheilung der ursprünglichen Richtungen und Geschwindigkeiten um den Punkt B festzusetzen.

Denkt man sich durch B alle möglichen Bewegungsrichtungen durchgelegt, so entspricht deren Zahl der Oberfläche der um diesen Punkt mit dem Halbmesser Eins beschriebenen Kugel. In jeder Richtung soll die absolute Geschwindigkeit c N-mal vorhanden sein. Durch die Grösse N können daher die verschiedensten Hypothesen über die ursprüngliche Vertheilung ausgedrückt werden.

Wenn jede beliebige Geschwindigkeit c_1, c_2 etc. von 0 bis ∞ nach jeder Richtung N-mal vorkommt, so ist N eine Constante. Jede Richtung und jede Geschwindigkeit ist ebenso wahrscheinlich als eine andere. Die Anzahl aller zwischen den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 vorhandenen Fälle ist nach jeder Richtung dann: $N(c_2-c_1)$ und in Bezug auf alle möglichen $4\pi N(c_2-c_1)$ proportional. Diese Annahme ist diejenige, welche ähnlichen Betrachtungen gewöhnlich zu Grunde gelegt wird, und sie hat, bis zu einem gewissen Grade, volle Berechtigung. Es ist damit gesagt, dass die Bahnen nicht systematisch, sondern nach dem Zufalle vertheilt gedacht werden. Es müssten zwar auch dann nicht alle Richtungen und Geschwindigkeiten wirklich vertreten sein, sowie auch z. B. die Sterne am Himmel nicht gleichmässig vertheilt erscheinen. Allein es wird hiedurch ausgedrückt, dass kein zureichender Grund vorliege, irgend eine Richtung oder Geschwindigkeit für wahrscheinlicher zu erachten als eine andere.

Gleichwohl wird man der Wahrheit doch näher kommen, wenn man zunächst hinsichtlich der Geschwindigkeiten Einschränkungen gelten lässt. So ist es beispielsweise als sicher zu betrachten, dass die beiden Grenzwerthe 0 und ∞ gar nicht vorkommen. Will man nun ausdrücken, dass die absoluten Geschwindigkeiten um B nur zwischen den endlichen Grenzen c_1 und c_2, innerhalb derselben aber gleich

wahrscheinlich vorhanden seien, so ist N für alle Werthe von c_1 bis c_2 als Constante zu betrachten, sonst aber Null zu nehmen. In Wirklichkeit wird eine solche Discontinuität zwar schwerlich bestehen; zur Vereinfachung und für die beiläufige Darstellung der Verhältnisse kann die Annahme immerhin zulässig sein. Begründeter würde es erscheinen im Allgemeinen $N = f(c)$ zu nehmen, doch muss berücksichtigt werden, dass die Erfahrung gegenwärtig nur wenig Anhaltspunkte darbietet, um sich über die Form der Function zu entscheiden. Nimmt man

$$N = \alpha + \beta c + \gamma c^2 + \delta c^3 + \ldots,$$

so könnten einige besondere Hypothesen durch Annahme der Coëfficienten untersucht werden. Einstweilen ist es jedoch noch wenig lohnend, in dieser Hinsicht sehr weit zu gehen.

Wenn man bezüglich der Geschwindigkeiten in der That kaum vermeiden kann, von der Annahme gleicher Wahrscheinlichkeit aller denkbaren Grössen abzugehen, so ist dies hinsichtlich der Richtungswahrscheinlichkeit nicht in demselben Grade der Fall. Ja man darf wohl sagen, dass die Annahme, es sei eine Richtung eben so wahrscheinlich, als irgend eine andere, von vornherein als die nächstliegende gelten muss. Allein man könnte wohl auch in dieser Hinsicht besonderen Hypothesen Rechnung tragen. So wird es z. B. mehrfach aus theoretischen Gründen oder nach den Ergebnissen der Beobachtungen für möglich oder wahrscheinlich gehalten, dass in benachbarten Regionen des Weltraumes die Tendenz einer mehr oder minder gleichmässigen Bewegungsrichtung vorherrsche, und hieraus könte man schliessen, dass auch die hier in Frage kommenden kleinen Weltkörper häufiger eine Bewegungsrichtung besitzen, welche mit jener des Sonnensystems mehr oder weniger übereinstimmt als irgend eine andere.

Diese Annahme würde dadurch ausgedrückt werden, dass die Richtungen, deren absolute Elongationen E vom Apex der Sonne nicht ferne von 180° sind, häufiger vertreten erscheinen als diejenigen, für welche E kleiner ist. Allgemein genommen kann also auch $N = \varphi(E)$ gedacht werden. Besondere Annahmen sollen, um Wiederholungen zu vermeiden, den späteren Entwicklungen vorbehalten bleiben. Im allgemeinsten Falle wäre daher $N = F(c, E,)$, denn man wird für derartige allgemeine Betrachtungen kaum Gründe finden, um noch eine weitere Auswahl unter allen denjenigen Richtungen zu treffen, welche auf der Mantelfläche eines und desselben durch E bestimmten Kegels liegen. So lange also c und E gleichzeitig constant bleiben, wird auch N unverändert zu nehmen sein.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich, dass durch Specialisirung der Function, welche N bestimmen soll, verschiedene Vorstellungen über die ursprüngliche Vertheilung der Bahnen und Geschwindigkeiten zum Ausdrucke gelangen können.

Die Drehung des Dreieckes ABC um AB liefert die beiden schon früher erwähnten Kegelflächen, von welchen die eine alle absoluten Richtungen der Geschwindigkeit c in der Elongation E, die andere alle in der Elongation E' daraus hervorgehenden relativen Richtungen mit der heliocentrischen Geschwindigkeit v darstellt. Die Durchschnitte dieser Kegel mit den um A und B beschriebenen Kugeln liefern Kleinkreise vom sphärischen Halbmesser E (oder $180-E$) und E' (oder $180-E'$). Betrachten wir nun jene absoluten Richtungen, welche zwischen den Elongationszonen E und $E+dE$ liegen und die auf der Kugel um B der Zonenfläche $2\pi \sin E dE$ entsprechen, so ist, weil nach dem vorigen für diese Zone N jedenfalls als constant zu gelten hat, die Anzahl der in diesem Raume liegenden Bahnen mit der absoluten Geschwindigkeit c:

$$2\pi N \sin E dE.$$

Die durch Zusammensetzung mit $AB = u$ entstehenden zugehörigen heliocentrischen Richtungen mit der Geschwindigkeit v sind zwischen den Grenzen E' und $E'+dE'$ enthalten (wobei dE' auch negativ werden kann), also in der Zonenfläche $2\pi \sin E' dE'$. Der Quotient dieser beiden Ausdrücke gibt die Dichtigkeitsfunction D in der Elongation E' für das festgesetzte c. Lässt man c in $c+dc$ übergehen, so stellt derselbe $\frac{dD}{dc}$ dar. Hiernach ist

$$\frac{dD}{dc} = N \cdot \frac{\sin E dE}{\sin E' dE'}. \qquad 2)$$

Den gleichmässigen Veränderungen in c entsprechen ungleichmässige in v. Erstere ist die unabhängig Veränderliche. Will man jedoch, was nur unter gewissen Bedingungen zulässig ist, den Fall für constante Veränderungen in v untersuchen, so hat man aus diesem Grunde:

$$\frac{dD}{dv} = N. \frac{\sin E dE}{\sin E' dE'} . \frac{dc}{dv}. \tag{3}$$

Wird vorerst nebst u auch c als constant betrachtet, so erhält man aus

$$c \cos E = v \cos E' - u$$

$$-\frac{c}{v} \frac{\sin E dE}{\sin E' dE'} = \frac{\cos E'}{v . \sin E'} . \frac{dv}{dE'} - 1,$$

dann aus

$$c^2 = u^2 + v^2 - 2uv \cos E'$$

$$\frac{dv}{dE'} = \frac{uv \sin E'}{u \cos E' - v},$$

daher

$$\frac{\sin E dE}{\sin E' dE'} = \frac{v^2}{c(v - u \cos E')} = \frac{v^2}{c\sqrt{c^2 - u^2 \sin E'}},$$

weil

$$v = u \cos E' \pm \sqrt{c^2 - u^2 \sin^2 E'}. \tag{4}$$

Von der entsprechenden Verwendung der beiden Vorzeichen wird noch die Rede sein.

Man erhält somit

$$\frac{dD}{dc} = N. \frac{v^2}{c\sqrt{c^2 - u^2 \sin^2 E'}}. \tag{I}$$

Nimmt man nun an, dass bei unveränderter scheinbaren Elongation E', v übergeht in $v + dv$, so ergibt sich die zugehörige Änderung in c aus der obigen Gleichung für v:

$$\frac{dc}{dv} = \mp \frac{\sqrt{c^2 - u^2 \sin^2 E'}}{c}.$$

Auf das Doppelzeichen braucht hier zunächst keine Rücksicht genommen zu werden. Die Gleichung 3) gibt dann

$$\frac{dD}{dv} = N. \frac{v^2}{c^2} = N. \frac{v^2}{u^2 + v^2 - 2uv \cos E'}. \tag{Ia}$$

Die Gleichung I gibt die Dichte für jede Elongation E', unter der Voraussetzung, dass aus einem einzelnen bestimmten Werthe von c in jeder Elongation ein anderes v hervorgeht, während Gleichung I a den entgegengesetzten Fall darstellt, nämlich, dass v in allen Elongationen das gleiche ist und die hiezu nöthigen verschiedenen c vorhanden sind. Sobald c wesentlich grösser als u ist, geben beide Ausdrücke nur wenig verschiedene Resultate.

Wir erörtern, ehe wir zur Integration von I übergehen, noch Gleichung Ia und nehmen zunächst an, dass N völlig constant sei, d. h. dass also die ursprünglichen Richtungen und Geschwindigkeiten alle gleich wahrscheinlich wären.

Unter dieser Voraussetzung zeigt der oben entwickelte Ausdruck Ia, dass die Dichtigkeit der kosmischen Ausgangspunkte in jedem sphärischen Abstande E' vom Sonnenapex proportional ist dem Quadrate des Quotienten aus den zwei zusammengehörigen Werthen der heliocentrischen und absoluten Geschwindigkeit. Das in der Elongation E' einem bestimmten v zugehörige c ist oben schon ausgedrückt. Geht man umgekehrt von einem bestimmten c aus, so ergibt sich das zugehörige v aus Gleichung 4, welchen Werth man einsetzen kann, wenn die Dichtigkeitsfunction vollständig durch c ausgedrückt werden soll.

Will man die Verhältnisse der Dichtigkeit in allen Elongationen für eine bestimmte, angenommene heliocentrische Geschwindigkeit v untersuchen, so ist auch diese als constant zu betrachten und die Dichtigkeit ist dann verkehrt proportional den Quadraten der zugehörigen absoluten Geschwindigkeiten c. Diese lassen sich auch leicht graphisch darstellen. Wird um A mit dem Halbmesser v ein Kreis beschrieben, so ist die Länge der Strecke von B bis zu jedem Punkte dieser Kreisperipherie das betreffende c.

Da diese Betrachtung sich ausdrücklich nur auf die Verhältnisse für den grossen Radiusvector r bezieht, so muss noch jener Factor angebracht werden, welcher die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, dass für irgend eine Geschwindigkeit die Periheldistanz $\gtreqless 1$ werde. Man kann diese Wahrscheinlichkeitsfunction aus den von Herrn Prof. Dr. Seeliger in Nr. 2968 der »Astronomischen Nachrichten« gegebenen Entwicklungen und meinen Ergänzungen dazu (A. N. Nr. 3224) für den vorstehenden Zweck leicht ableiten. Beschränkt man sich wegen der äusserst geringen Wahrscheinlichkeit der Ellipsen [1] auf die Parabeln und Hyperbeln, so ist es ausreichend, dem vorhin entwickelten Ausdrucke für $\frac{dD}{dv}$ den Factor

$$\frac{1}{2r^2}\left(1+\frac{2}{v^2}\right) \tag{5}$$

anzuhängen, wobei überdies die Constante $\frac{1}{2r^2}$ auch wegbleiben oder mit N vereinigt gedacht werden kann.

Hienach würden wir also bezüglich derjenigen Bahnen, welche in unsere Beobachtungssphäre gelangen können, erhalten

$$\frac{dD}{dv} = N\frac{v^2+2}{u^2+v^2-2uv\cos E'}. \tag{II}$$

Es ist jedoch sofort zu erkennen, dass die Dichtigkeits-Verhältnisse in den verschiedenen Elongationszonen keine Änderungen erleiden, ob man sie nun aus diesem oder dem vorigen Ausdrucke berechnet, solange man immer nur bei einer bestimmten Annahme für v bleibt. Dagegen darf der Wahrscheinlichkeitsfactor allerdings dann nicht wegbleiben, wenn man die Dichtigkeiten in ein und derselben Elongationszone für verschiedene Geschwindigkeiten mit einander vergleichen will, oder wenn man den vorhandenen Zustand als Complex der verschiedensten Werthe von v betrachtet.

Die Realität der Vorstellung einheitlicher Geschwindigkeit v besitzt übrigens streng genommen nur sehr geringe Wahrscheinlichkeit. Im Allgemeinen wäre diese nur möglich, wenn die absolute Geschwindigkeit nach jeder Richtung stets die Bedingung

$$c = -u\cos E + \sqrt{v^2 - u^2\sin^2 E}, \tag{6}$$

worin dann nebst u auch v constant wäre, vollkommen erfüllen würde. Also dürften in jeder Elongation nur Körper von einer ganz bestimmten Geschwindigkeit sich bewegen. Die Wahrscheinlichkeit dieser Annahme ist aber in so allgemeiner Form sicher unendlich klein. Dagegen wäre es wohl möglich, dass v annähernd einheitlich ausfällt, und es ist wichtig genug diese Möglichkeit besonders zu betrachten.

Legt man die ursprünglich gegebenen Grössen c und E zu Grunde, so ist

$$v^2 = c^2 + u^2 + 2uc\cos E.$$

Angenommen, dass c annähernd einheitlich wäre, so würde v ebenfalls von E ungefähr unabhängig, also gleichmässig ausfallen, wenn einer der beiden Factoren von $\cos E : c$ oder u gegen den andern verschwindend klein würde.

---

[1] Hinsichtlich der verschwindend geringen Wahrscheinlichkeit der Ellipsen für derartige Bahnen bestehen wohl gegenwärtig keine theoretischen Zweifel mehr. Was aber die Erfahrung betrifft, so kann es bezüglich der Cometen allerdings noch zweifelhaft sein, ob die für die grosse Mehrzahl derselben errechneten Parabeln mehr auf die Seite der Ellipsen oder der Hyperbeln neigen; allein auf die parabelähnlichen Ellipsen, welche dabei nur in Frage kommen können, bezieht sich der hier gegebene Ausdruck ebensogut als auf die strengen Parabeln. Die Ellipsen kürzerer Halbaxe werden gegenwärtig wahrscheinlich mit vollem Rechte, als Producte besonderer Störungen aus den parabelähnlichen Bahnen abgeleitet.

Der Grenzwerth ist in dem einen Falle $c = 0$, woraus $v = u$ als Constante hervorgeht. Es würden also dann alle diese Körper im Weltraume sozusagen ruhend oder doch nur in äusserst geringer Bewegung gedacht. Dieser Fall ist nach unserer Erfahrung jedoch völlig auszuschliessen, denn wegen

$$\cos E' = \frac{u^2 + v^2 - c^2}{2uv} \tag{7}$$

erhält man für $c = 0$ und $v = u$ nur einen einzigen möglichen Werth für E', nämlich 0; oder alle relativen Bahnen würden vom Apex her gerichtet, dort also alle Ausgangspunkte concentrirt sein. Die Dichtigkeit würde an diesem Punkte ∞, sonst überall 0 sein. Dieser Zustand wäre sehr weit von demjenigen entfernt, auf welchen die Beobachtungen hinweisen.

Der andere Fall, wenn nämlich die Geschwindigkeit der Sonne (u) verschwindend oder doch sehr klein gegen c wäre, führt annähernd auf $v = c$ (weil dann auch $\frac{u}{v}$ verschwindend klein würde) für alle Elongationen, und damit auf constante Dichte oder gleichmässige Vertheilung der Ausgangspunkte in Bezug auf den Apex. Diese Annahme würde gewiss weniger gegen die Erfahrung verstossen als die erste, aber sie setzt einen grossen Werth der kosmischen Geschwindigkeiten voraus, wenn anders die gewöhnlich angenommenen Werthe für u ungefähr richtig sind.

Man wird bemerken, dass diese beiden Möglichkeiten annähernd einheitlicher v schon eine Specialisirung der Function N enthalten, da diese dann aufhört allgemein constant zu sein, vielmehr von der Art gedacht würde, dass sie nur für ein ganz eng begrenztes Gebiet von c, im einen Falle für ganz kleine im andern Falle für sehr grosse Werthe, endlich und reell, sonst aber Null werde.

Will man weitere Einschränkungen von N annehmen, so lässt sich endlich noch eine dritte Möglichkeit einheitlicher v denken. Diese besteht offenbar darin, dass nebst c auch E constant wäre. Damit nimmt man an, dass die ursprüngliche Bewegungsrichtung nur einen bestimmten Winkel mit jener der Sonne bildet oder, dass dies doch wenigstens innerhalb gewisser engen Grenzen der Fall sei. Es sind dann in dem Ausdrucke für v^2 alle Glieder ganz oder nahezu constant. Unter den vielen Specialisirungen, welche diese Annahme hinsichtlich c und E noch zulässt. gibt es nur eine, welche den Erfahrungen entsprechen würde, nämlich diejenige, wobei c wenig von u abweichend und E innerhalb enger Grenzen um 180° gedacht wird. Es wird dann annähernd $v = c - u$ oder $u - c$ wenig von Null verschieden sein. Diese Hypothese findet bekanntlich ihren Ausdruck in der Vorstellung über die ursprüngliche Bewegung der Cometen, wenn man Letztere als Körper von stellarer, nicht planetarischer Abkunft betrachtet. Auch in diesem Falle ist also die Anfangsgeschwindigkeit nahezu einheitlich und ebenso auch der Charakter der betreffenden Bahnen.

Sieht man von den hier erörterten besondern Fällen ab, so wird als Regel das gleichzeitige Vorkommen vieler verschiedener Geschwindigkeiten zwischen gewissen Grenzen v_1 und v_2 anzunehmen sein. Die Darstellung des sich hieraus ergebenden Zustandes wird daher eine Integration erfordern, die später für die allgemeinsten Annahmen durchgeführt werden wird. Dabei bleibt es aber doch unerlässlich, die Verhältnisse auch für jede einzelne Geschwindigkeit zu untersuchen, und zwar aus folgendem Grunde: Wenn man die Vertheilung der scheinbaren Radianten berechnen will, welche irgend einer Verdichtung der Ausgangspunkte entspricht, so bedarf man dazu der Grössen a und V (siehe 1), welche beide Functionen von v sind. Wird nun angenommen, dass in irgend einer Ausgangsrichtung Bahnen mit verschiedenen v vorkommen, so erhält man aus jedem einzelnen Ausgangspunkt so viele Radianten, als Geschwindigkeiten vertreten sind, und es ist daher nicht zu vermeiden, sich auch über die Verdichtungsverhältnisse für alle einzelnen Annahmen Rechenschaft zu geben.

Dem Ausdrucke für $\frac{dD}{dv}$ lässt sich in dieser Hinsicht Folgendes entnehmen:

a) Für jedes einzelne v ist die Dichtigkeit der Ausgangspunkte am grössten am Sonnenapex, am kleinsten am Antiapex. Das Verhältniss der grössten zur kleinsten Dichtigkeit ist $\left(\frac{u+v}{u-v}\right)^2$. Das Verhältniss der Dichtigkeiten am Apex und in der Elongation $E'=90°$ ist dagegen $\frac{u^2+v^2}{(u-v)^2}$.

b) Die grösste Ungleichheit der Dichtigkeiten tritt ein für die besondere Annahme $v=u$, da in diesem Falle die Dichtigkeit am Apex (wobei auch $c=0$) ∞ wird. Die grossen Unterschiede erstrecken sich jedoch nur auf einen verhältnissmässig kleinen Theil der Kugel. Die Dichtigkeiten in den Elongationen 60°, 90° und 180° verhalten sich nur mehr wie 4 : 2 : 1. Die betreffende Hyperbel von der Axe $-\frac{1}{u^2}$ ist zugleich diejenige Bahnform, welche unter diesen allgemeinen Voraussetzungen am häufigsten beobachtet werden könnte. Die Dichtigkeit ∞ für den Apex (selbstverständlich nur in einem unendlich kleinen Flächenelement) entsteht, wie leicht zu bemerken ist, nur durch den Werth $c=0$. Schliesst man die kleinsten Werthe von c aus, so entfällt auch die grösste Verdichtung am Apex und die grösste Wahrscheinlichkeit dieser Bahnform.

c) Die relativen Dichtigkeiten, oder die Verhältnisszahlen in den einzelnen Zonen, sind jedesmal dieselben für $\frac{v}{u}=\frac{1}{u}$, wie für $\frac{v}{u}=u$, was in der Symmetrie des Nenners bezüglich u und v begründet ist. Entfernt man sich also von dem Grenzfalle b): $\frac{v}{u}=1$ nach den beiden Seiten $v<u$ und $v>u$, so erhält man je für die Reciprokwerthe dieses Verhältnisses gleiche relative Dichtigkeiten. Die absoluten Werthe hängen jedoch, wenn der früher angeführte Wahrscheinlichkeitsfactor berücksichtigt wird, von der Hypothese für u ab.

d) Aus c) geht hervor, dass die beiden äussersten Annahmen: $\frac{v}{u}=0$ und $\frac{v}{u}=\infty$ bezüglich der relativen Dichtigkeiten den gleichen Erfolg haben, und zwar giebt der Ausdruck in beiden Fällen gleichmässige, von E' unabhängige Vertheilung.

Diese Bemerkungen lassen sich in dem folgenden Satze kurz zusammenfassen: Die Verdichtungen der Ausgangspunkte erscheinen desto geringer, je weiter man sich von der Hypothese $\frac{v}{u}=1$ nach der einen oder anderen Seite entfernt.

Für die Vergleichung mit den Ergebnissen der Beobachtung ist indessen hervorzuheben, dass es keineswegs nöthig ist, die unter d) angeführten Grenzfälle anzunehmen, um eine anscheinend gleichmässige Vertheilung plausibel zu machen, denn ganz abgesehen davon, dass schon die ursprüngliche Anordnung der Bahnen eine ungleichmässige sein kann, sind die Nebeneinflüsse auf die Beobachtung — und dies gilt sowohl für Cometen als für Meteore — so zahlreich und bedeutend, dass durch dieselben das Gesetz der Dichtigkeitszunahme gegen den Apex völlig verdeckt und je nach Umständen eine mehr oder weniger gleiche Vertheilung, oder auch eine solche aus den Beobachtungen hervorgehen kann, bei welcher die Verdichtung in anderen Regionen selbst bedeutender als am Apex erscheint.

Man wird mit Sicherheit auf den Nachweis der Verdichtung in der Nähe des Apex nur dann rechnen können, wenn dieselbe so erheblich ist, dass solche Nebenumstände sie nicht leicht verdunkeln können und deshalb ist es von Interesse zu untersuchen, bei welcher noch wahrscheinlichen Annäherung an die beiden Grenzfälle die Dichtigkeitsunterschiede schon gering werden.

Die Hypothese, dass $\frac{v}{u}$ eine sehr kleine, von Null wenig verschiedene Grösse sei, ist an die schon oben angedeutete, ganz besondere Annahme für N gebunden. Für die äusserste zulässige Grenze von $\frac{v}{u}$ müssen nämlich, wie leicht einzusehen, in Bezug auf c und E die Bedingungen erfüllt sein, dass

$$1-\frac{v}{u}\lesseqgtr\frac{c}{u}\lesseqgtr 1+\frac{v}{u}, \quad E\gtreqless\pi-\arcsin\frac{v}{u}.$$

Bei den typischen, parabelähnlichen Bahnen der Cometen und derjenigen Meteorströme, welche man mit jenen in einen gewissen Zusammenhang bringt, beweist die Bahnform, dass v ganz bestimmt sehr klein ist. Über die Geschwindigkeit des Sonnensystems u lauten die Angaben bekanntlich sehr verschieden. Aber selbst für die kleinste wird $\frac{v}{u}$ immer noch ein sehr kleiner Bruch, wenn v die parabolische Geschwindigkeit in der Entfernung r bedeutet. So wird z. B. für $r = 100.000$ und $u = \frac{1}{4}$, $\frac{v}{u}$ ungefähr $\frac{1}{56}$. Man kann sich durch Substitution in den Ausdruck für $\frac{dD}{dv}$ leicht überzeugen, dass für dieses Verhältniss die Dichtigkeitsdifferenzen ganz verschwindend klein werden. Damit v diesen Betrag nicht überschreite, müsste jedoch, nach den beispielsweisen Annahmen, die ursprüngliche Geschwindigkeit c nur innerhalb der engen Grenzen $\frac{1}{4} \mp \sqrt{\frac{2}{100.000}}$ vorhanden sein und die Bewegungsrichtung dieser Körper ungefähr bis auf einen Grad mit jener der Sonne übereinstimmen.

Ob diese Vorstellung einer ganz besonderen kosmischen Bewegung jener Gebilde, denen die Cometen entstammen, etwa weniger wahrscheinlich wäre als die andere, nach welcher dieselben planetarischen, oder im engeren Sinne solaren Ursprunges sind, kommt hier nicht in Frage, denn dass für die der Parabel sehr nahe kommenden Bahnen v wirklich viel kleiner als u sein muss, ist keine Hypothese, sondern eine unbestreitbare Thatsache. Es ist daher eben so sicher, dass von vorne herein eine Verdichtung der Cometen-Aphele gegen den Sonnenapex keinesfalls anzunehmen ist, ob man nun die Cometen als stellare oder solare Körper betrachtet.

Laplace rechnet zu diesem Typus auch noch die Hyperbeln bis zur Halbaxe $a = -100$, weil auch für diese noch der Unterschied von der Parabel oft nicht sicher durch die Beobachtungen nachweisbar ist. Dieser Grenze würde sehr nahe $v = 0 \cdot 1$ entsprechen. Wenn man aber u etwas grösser als früher annehmen würde, z. B. 2 geographische Meilen oder $0 \cdot 5$, so würde $\frac{v}{u}$ noch immer erst $\frac{1}{5}$ und, nach dem Früheren, die grössten Dichtigkeits-Unterschiede der Aphele $2\frac{1}{4} : 1$ betragen. Es erscheint mir nicht zweifelhaft, dass auch diese Differenz noch durch die Ungunst der Beobachtungsverhältnisse verwischt werden könnte. Die Grenzen, innerhalb welcher sich die Annahmen von c und E noch bewegen könnten, wären dann schon viel weitere, nämlich für $c : 0 \cdot 4$ bis $0 \cdot 6$, für $E : 168 \cdot 5°$ bis $180°$.

Es lässt sich also ganz allgemein aussprechen, dass für die parabelähnlichen Bahnen der Cometen und analogen Meteorströme aus dem Mangel einer nachweisbaren Verdichtung ihrer Aphele oder Ausgangspunkte gegen den Sonnenapex kein Argument hervorgeht, welches den ausserplanetarischen Ursprung dieser Körper in Frage stellen könnte.

Was nun die andere Voraussetzung betrifft, nämlich dass $\frac{v}{u}$ sehr gross wäre, so ist dieselbe an keine Einschränkung hinsichtlich der ursprünglichen Richtungen gebunden. Wir haben unter e) gesehen, dass die Dichtigkeitsverhältnisse dann die gleichen sind, wie für das reciproke Verhältniss; also beispielsweise für $\frac{v}{u} = 5$ dieselben wie sie früher für $\frac{v}{u} = \frac{1}{5}$ angegeben wurden. Wenn wir wieder $u = 2$ g. M. annehmen wollten, so wäre dann $v = 10$ g. M. $= 2 \cdot 5$, woraus V (für $r = 1$) $= 2 \cdot 9$ oder $11 \cdot 6$ g. M. folgen würde. Nimmt man dagegen nur $u = 1$ g. M., so ergibt dieselbe Schlussfolgerung für V nur mehr $7 \cdot 6$ g. M. $= 1 \cdot 9$. Zwischen diesen beiden Grenzen bewegen sich aber wirklich die meisten Resultate, welche aus guten und zahlreichen Beobachtungen grosser Meteore hervorgegangen sind. Man würde also weder gegen diese bereits sehr zahlreichen und kaum zu bestreitenden empirischen Ergebnisse, noch gegen die noch etwas unsicheren Erfahrungen über die translatorische Geschwindigkeit der Sonne verstossen, wenn man annehmen wollte, dass eine grosse Zahl der in die Attractionssphäre der Letzteren gelangten Körper sich im Weltraume mit einer Geschwindigkeit bewegte, welche das Fünffache von jener der Sonne betrug oder vielleicht überstieg.

Für alle diese Körper würden sich aber die Dichtigkeitsextreme bezüglich der Vertheilung ihrer Ausgangspunkte gegen den Apex, so wie früher, höchstens wie $2\frac{1}{4}:1$ verhalten. Insoferne aber diese Ausgangspunkte durch Meteorradianten nachgewiesen werden sollen, sind die Beobachtungen noch weit mehr als bei den Cometen durch Nebenumstände bedingt, so dass man kaum darauf rechnen kann, so geringe Unterschiede wirklich nachzuweisen. Ich will, um hier, wo diese Frage nicht vollständig erörtert werden soll, nur Eines zu erwähnen, daran erinnern, dass der überwiegend grösste Theil der an den europäischen Beobachtungsorten nachweisbaren Radianten Ausgangspunkten angehört, welche zwischen den Elongationen $E' = 0°$ und $E' = 90°$ liegen müssen, während die andere Hälfte uns grossentheils verborgen bleibt. Für das angegebene Verhältniss von $\frac{v}{u}$ wären aber die entsprechenden Dichtigkeiten (nämlich in 0° und 90°), dann proportional $1 \cdot 6 : 1$, welche geringen Ungleichheiten sich durch die Radianten wohl schwerlich bemerkbar machen könnten.

Es wurden also hier zweierlei Fälle betrachtet, welche in Bezug auf $\frac{v}{u}$ entgegengesetzter Natur sind. Von beiden darf man mit grösster Wahrscheinlichkeit annehmen, dass sie der Wirklichkeit entsprechen und in beiden sind die Verhältnisse derart, dass Verdichtungen in der Nähe des Apex entweder gewiss nicht oder kaum erkennbar wären. Man kann jedoch noch viel weiter gehen.

In dem Ausdrucke II: $\frac{dD}{dv} = N\frac{v^2+2}{c^2}$ ist die Elongation E' nur im Nenner, in c, enthalten und es sind insbesondere die kleinen Werthe von c, welche erhebliche Verdichtungen bedingen. Wenn man nun N von solcher Art annimmt, dass die kleinen Geschwindigkeiten viel seltener sind als die grossen, können sich die Umstände noch wesentlich ändern. Ich will hier beispielsweise nur die Form $N = \gamma c^2$ betrachten, d. h. also, dass die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens der Geschwindigkeit im quadratischen Verhältnisse ihrer Grösse steht. Diese Annahme führt zu

$$\frac{dD}{dv} = k(v^2+2), \qquad \text{III}$$

so dass die Dichte für jede einzelne Geschwindigkeit eine Constante ist, denn E' kommt nun in dem Ausdrucke gar nicht vor. Für jede unter gewissen Voraussetzungen annehmbare Geschwindigkeit wäre bei dieser Hypothese hinsichtlich N die Vertheilung der Ausgangspunkte ganz ohne Beziehung zum Apex.

Wenn man auch durchaus keine Gründe dafür anführen kann, dass N dieser Form genau entspricht, so kann es ebensowenig in Abrede gestellt werden, dass die wirklichen Verhältnisse in einem gewissen Grade und bis zu irgend einer Grenze derselben einigermassen nahe kommen können. In ähnlichem Grade wird dann auch die Vertheilung der Ausgangspunkte der Gleichmässigkeit mehr oder minder entsprechen. Sicherlich würde man sich von der Wahrheit sehr weit entfernen, wenn man annehmen wollte, dass $N = \gamma\, c^2$ bis ins Unbegrenzte gelten könnte. Da jedoch die grossen Verdichtungen am Apex nur aus den Werthen $c < u$ hervorgehen, so genügt es offenbar, die Voraussetzung ungefähr bis zu der Grenze u anzunehmen, womit nämlich gesagt wäre, dass die absoluten Geschwindigkeiten, welche kleiner sind als die Geschwindigkeit der Sonne, viel seltener vorkommen als die grösseren, welch' letztere dann unter einander auch gleich wahrscheinlich sein können. Hieran wird nichts wesentliches geändert, wenn man weiter voraussetzt, dass von irgend einer Grenze angefangen wieder N von der Form $\frac{\gamma}{c^2}$ wäre, d. h. dass die Wahrscheinlichkeit übermässig grosser Geschwindigkeiten wieder sehr gering wird, denn der Umstand, dass dann im Nenner c^4 steht, bringt es mit sich, dass die Dichtigkeitsunterschiede auch für diese Bahnen sehr unbeträchtlich ausfallen müssen.

Dieser Abschnitt sollte insbesondere der Betrachtung jener Verhältnisse gewidmet sein, welche sich ergeben, wenn man irgend eine Hypothese für die Geschwindigkeit v für sich ins Auge fasst oder auch mehrere zusammen gelten lässt, doch immer unter der Voraussetzung, dass die hiezu nöthigen absoluten Geschwindigkeiten c soweit vorhanden seien, um aus denselben das oder die v, welche man animmt, in

allen Elongationen von 0° bis 180° hervorgehen zu lassen. Allgemein genommen würde dies erfordern, dass c unbegrenzt wäre, eine Annahme, welche aber gegen alle Erfahrung verstösst.

Nimmt man nun aus irgend einem Grunde an, dass c über die Grenzwerthe c_1 und c_2 beiderseits nicht hinausreiche, so bedürfen diese Erörterungen einer wichtigen Ergänzung. Es können dann folgende Fälle unterschieden werden:

Ist $u < c_1 < c_2$, so sind die Grenzen derjenigen heliocentrischen Geschwindigkeiten, für welche noch alle Elongationen möglich sind, offenbar $v_1 = c_1 + u$ und $v_2 = c_2 - u$ und es ist $v_2 - v_1 = c_2 - c_1 - 2u$, d. h. die Grenzen der für die obigen Betrachtungen ohne Einschränkung wählbaren Werthe von v sind um $2u$ enger als die der c.

Für $c_1 < u < c_2$ sind die Grenzen von $v: 0$ und $c_2 - u$ oder $u - c_1$, je nachdem die eine oder andere Differenz die kleinere ist.

Wenn endlich $u > c_2 > c_1$ wäre, so würde es gar keinen Werth von v geben, welcher nach allen Richtungen möglich ist, da dann alle Ausgangspunkte innerhalb 0 und $E' = \text{arc sin} \frac{c_2}{u}$ eingeschlossen sind. Für $c_2 = u$ ist $E' = 90°$.

Betrachtet man aber in den beiden ersten Fällen nur solche Werthe der Geschwindigkeit v, welche zwischen den angeführten Grenzen liegen, für welche also die ganze um A beschriebene Kugel in Betracht kommt, so bleiben dann noch jene übrig, welche ebenfalls aus den zwischen c_1 und c_2 liegenden absoluten Geschwindigkeiten entstehend, über die obigen Grenzen von v hinausgehen, und deren Richtungen daher nicht mehr der ganzen Kugel entsprechen. So wird man beispielsweise im ersten Falle leicht bemerken, dass die relativen Geschwindigkeiten bis zu $c_2 + u = v_2 + 2u$ nach aufwärts und bis $c_1 - u = v_1 - 2u$ nach abwärts möglich, aber hinsichtlich der Elongationsgrenze an die Bedingungen der Gleichung 7 gebunden sind, worin einmal die obere, dann die untere Grenze von c zu setzen ist.

Für die beispielsweisen Annahmen $u = 0 \cdot 5$, $c_1 = 2$, $c_2 = 4$ sind zwischen $v_1 = 2 \cdot 5$ und $v_2 = 3 \cdot 5$ bei jedem Werthe von v alle Elongationen möglich und innerhalb dieser Grenzen kann also $\frac{dD}{dv}$ wie früher verwerthet werden. Anderseits wird unter $v = 1 \cdot 5$ und über $v = 4 \cdot 5$ gar kein Werth liegen können. Die zwischenliegenden $v = 1 \cdot 5$ bis $2 \cdot 5$, dann $v = 3 \cdot 5$ bis $4 \cdot 5$ betreffen Richtungen, welche nicht mehr über die ganze Kugel vertheilt sein können. Setzt man z. B. $v = 2 \cdot 0$, so ergibt die obige Gleichung, dass diese Geschwindigkeit nur in den Elongationen zwischen 82·8° und 180° vorkommen kann, weil von 0° bis 82·8° um $v = 2$ zu erzeugen $c > 2$ sein müsste, was der Annahme widerspricht. Für diese Hypothese würde also der Raum zwischen dem Apex und $E' = 82 \cdot 8°$ gar keine Ausgangspunkte enthalten, welche $v = 2$ angehören. In den übrigen Elongationen bliebe die Anordnung dem früheren Gesetze entsprechend. Betrachtet man dagegen die Verhältnisse für $v = 4$, so findet man wieder, dass nur Elongationen von 0 bis 86·5° möglich sind, weil für die übrigen bis 180° $c > 4$ sein müsste.

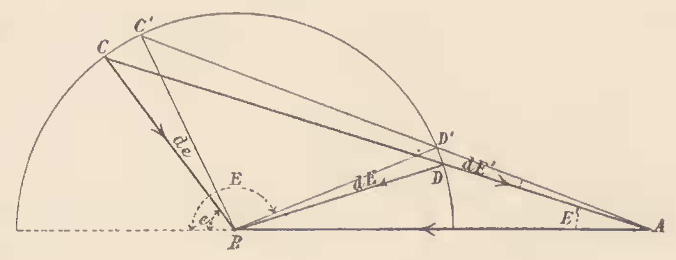
Auf diese Weise kann man für jede einzelne Geschwindigkeit v, welche ausserhalb der Grenzen v_1 und v_2 liegt, die Vertheilung der Ausgangspunkte ebenfalls angeben. Will man jedoch den Zustand in seiner Gesammtheit für jede Elongation darstellen, so erhält man aus Gleichung 4, worin für $c > u$ das untere Zeichen keine Verwendung findet, wenn die beiden gegebenen Grenzen c_1 und c_2 eingesetzt werden, die äussersten Grenzen v' und v'' von v, welche in der Elongation E' überhaupt möglich sind. Die Aufgabe ist dann allgemein darauf zurückgeführt

$$D = \int_{v'}^{v''} N \cdot \frac{v^2 + 2}{u^2 + v^2 - 2uv \cos E'} dv$$

innerhalb der angegebenen Grenzen auszuwerthen. Dieses unterliegt zwar keinen Schwierigkeiten, doch lassen sich die möglichen Annahmen hinsichtlich N einfacher berücksichtigen, wenn man bei dieser Entwicklung direct von der unabhängig Veränderlichen c ausgeht. Hiemit beschäftigt sich der folgende Abschnitt.

II.

Um die Gesammtheit der Verhältnisse darzustellen, welche entstehen, wenn die absoluten Geschwindigkeiten zwischen den Grenzen c_1 und c_2 vorhanden gedacht und alle daraus möglichen relativen Geschwindigkeiten und Richtungen abgeleitet werden, untersuchen wir zuerst den Fall: $c_2 \lesseqqgtr u$, wobei man also nur solche stellare Geschwindigkeiten betrachtet, welche nicht grösser als die Geschwindigkeit der Sonne sind.



Der um B mit dem Halbmesser c gezogene Kreis — welcher also durch Rotation um AB die betreffende Kugel liefert — wird durch die aus A in der Elongation E' gezogene Gerade entweder gar nicht getroffen, d. h. es kann dann aus den Annahmen c und u in dieser Elongation gar keine Bahn hervorgehen, oder er wird von ihr berührt, welches der Grenzfall ist, oder endlich, es entstehen zwei Schnittpunkte C, D und zweierlei Bahnen in derselben relativen Richtung. $CB = c$ in der Elongation e bildet mit u die relative Geschwindigkeit $CA = v$ in der Elongation E'; $DB = c$ in der Elongation E liefert ebenso $DA = v'$ auch in E'. Diese beiden Geschwindigkeiten in der gleichen Richtung sind durch Gl. 4) bestimmt, welche mit Rücksicht auf beide Vorzeichen zerfällt in

$$\left.\begin{aligned} CA = v = u\cos E' + \sqrt{c^2 - u^2\sin^2 E'} \\ DA = v' = u\cos E' - \sqrt{c^2 - u^2\sin^2 E'} \end{aligned}\right\} \text{4) a}$$

Wird der Kreis von dem aus A gezogenen Strahl nur berührt, wofür $\sin E' = \frac{c}{u}$, so entsteht blos $v = u\cos E'$.

Hiernach wird die Differentialzone zwischen E' und $E' + dE'$ die sämmtlichen Ausgangspunkte enthalten, sowohl aus den absoluten Richtungen zwischen e und $e + de$ mit der Geschwindigkeit v, als auch jene zwischen E und $E + dE$, mit v' entstehenden. Hiebei besitzen de und dE entgegengesetzte Vorzeichen, welche den beiden Zeichen in 4) entsprechen.

N soll nun zunächst als constant betrachtet, ferner r in Gl. 5) mit N in die Constante k vereinigt werden.

Die Gleichung 1 ist nun sowohl mit der Geschwindigkeit v als mit v', anzuwenden. Bezeichnen Δ und Δ' die zugehörigen Dichtigkeiten oder die Anzahl der Ausgangspunkte auf der Flächeneinheit der Elongation E', so erhält man aus 1, an welche der Factor: $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{r^2}\right)$ (Gl. 5) noch anzubringen ist, wenn für v und v' die Werthe $4a$ gesetzt werden:

$$\text{8.)} \left\{\begin{aligned} \frac{d\Delta}{dc} &= k\left[1 + \frac{(u\cos E' + \sqrt{c^2 - u^2\sin^2 E'})^2}{2}\right]\frac{1}{c\sqrt{c^2 - u^2\sin^2 E'}} \\ \frac{d\Delta'}{dc} &= k\left[1 + \frac{(u\cos E' - \sqrt{c^2 - u^2\sin^2 E'})^2}{2}\right]\frac{1}{c\sqrt{c^2 - u^2\sin^2 E'}} \end{aligned}\right.$$

Werden beide Gleichungen, nach Entwicklung der angezeigten Quadrate addirt, so erhält man, nach einiger Reduction:

$$\text{9.)} \quad \overset{c_2}{\underset{c_1}{D}} = k(2 + u^2\cos 2E')\int_{c_1}^{c_2}\frac{dc}{c\sqrt{c^2 - u^2\sin^2 E'}} + k\int_{c_1}^{c_2}\frac{c\,dc}{\sqrt{c^2 - u^2\sin^2 E'}}$$

Zur Vereinfachung setzen wir die nun häufig wiederkehrenden Ausdrücke:

$$10.\left\{\begin{array}{l}\sqrt{c_2^{\,2}-u^2\sin^2 E'}-\sqrt{c_1^{\,2}-u^2\sin^2 E'}=P\\ \dfrac{1}{u\sin E'}\left[\text{arc}\sin\left(\dfrac{u\sin E'}{c_2}\right)-\text{arc}\sin\left(\dfrac{u\sin E'}{c_1}\right)\right]=R\end{array}\right.$$

dann ist

$$D_{c_1}^{c_2}=k[P-(2+u^2\cos 2E')\,R] \qquad \text{IV.}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen kann man die Dichtigkeitsverhältnisse für irgend welche Grenzhypothesen in allen Elongationen berechnen. Dabei hat man jedoch Folgendes zu beachten: Für $\sin E'=\frac{c}{u}$ wird das betreffende Glied in P: 0 und in R: $\frac{\pi}{2}$. Die Bedeutung dieses Grenzfalles ist früher schon berührt worden. Da über diese Elongation hinaus mit der Annahme c keine Richtung mehr möglich ist, so sind diese Glieder auch für $\sin E'>\frac{c}{u}$ Null und $\frac{\pi}{2}$ zu nehmen. Geht man daher bei der Berechnung von $E'=0$ aus, mit wachsenden Werthen von E', so gelangt man zuerst zu jenem besonderen Werth $E'=\text{arc}\sin\frac{c_1}{u}$, bei welchen die Glieder, welche c_1 enthalten, 0 und $\frac{\pi}{2}$ werden, dann aber auch zu dem analogen Grenzwerth, für welchen dasselbe in Bezug auf c_2 gilt. Daher muss für $E'=\text{arc}\sin\frac{c_2}{u}$ die Dichte Null sein. Für $c_2=u$, welches die Grenze ist, welche wir hier betrachten können, gibt es von $E'=90°$ bis $E'=180°$ keine Ausgangspunkte.

Aus diesen Andeutungen ergeben sich sofort folgende Specialisirungen:

$$\text{IVa} \qquad \overset{c_2}{\underset{0}{D}}=k\left\{\sqrt{c_2^{\,2}-u^2\sin^2 E'}-\frac{2+u^2\cos 2E'}{u\sin E'}\left[\text{arc}\sin\left(\frac{u\sin E'}{c_2}\right)-\frac{\pi}{2}\right]\right\}$$

$$\text{IVb} \qquad \overset{u}{\underset{c_1}{D}}=k\left\{u\cos E'-\sqrt{c_1^{\,2}-u^2\sin^2 E'}-\frac{2+u^2\cos 2E'}{u\sin E'}\left[E'-\text{arc}\sin\left(\frac{u\sin E'}{c_1}\right)\right]\right\}$$

$$\text{IVc)} \qquad \overset{u}{\underset{0}{D}}=k\left[u\cos E'+\frac{2+u^2\cos 2E'}{u\sin E'}\left(\frac{\pi}{2}-E'\right)\right]$$

Bei der Annahme des abgekürzten Ausdruckes für die mit der Periheldistanz zusammenhängende Wahrscheinlichkeit (Gl. 5 im vorigen Abschnitte) ist die Geschwindigkeit v nicht von 0, sondern erst von $v=\frac{\sqrt{2}}{r}$ angefangen berücksichtigt worden, worin allerdings $r=100.000$ ist. Da nun, unter allen möglichen Werthen von v, welche sich für $c=u$ ergeben, auch der besondere: $v=0$ vorkommt, so kann in aller Strenge die Integration bis zu dieser Grenze nicht ganz genau gelten. Wegen des grossen Werthes von r ist jedoch die Vernachlässigung ganz unerheblich. Auch bleibt es für das practische Bedürfniss offenbar gleichgiltig, ob die Grenze von c bis u ausgedehnt wird, oder um einige Hunderttausendtel darunter bleibt.

Die aus diesen und allen folgenden Gleichungen hervorgehenden Relativzahlen der Dichtigkeit in den verschiedenen Elongationen E' vom Sonnenapex sind nun freilich von einer bisher nur sehr unsicher bekannten Grösse, nämlich von der räumlichen Geschwindigkeit u der Sonne, abhängig. Nicht so sehr ist dieses jedoch der Fall für die gleichen Verhältnisse von $\frac{c}{u}$. Auf absolute Werthe kommt es in dieser Frage wohl auch nicht an, da Alles, was in Bezug auf c vorausgesetzt werden kann, gleichfalls hypothetisch ist. Die absoluten Werthe der Dichtigkeit nehmen ab, wenn u vergrössert wird, weil mit u auch v wächst und damit die Anzahl jener Bahnen, deren Sonnennähe den Radiusvector der Erdbahn nicht übersteigt, vermindert wird. Mit anderen Worten: Je schneller sich die Sonne weiterbewegt, desto geringer wird,

unter sonst gleichen Umständen, die Zahl der Körper, welche bis in unsere Beobachtungssphäre dringen.[1]

Hier beschäftigen uns die Dichtigkeitsverhältnisse in den verschiedenen Elongationszonen und in dieser Hinsicht beweisen die allgemeinen Ausdrücke, dass, so lange auch die obere Grenze von c die Grösse u nicht übersteigt, das Dichtigkeits-Maximum nur dann im Apex ($E'=0$) sich befindet, wenn man als untere Grenze der vorhandenen räumlichen Geschwindigkeiten: $c_1=0$ annimmt. In allen anderen Fällen trifft es in irgend eine vom Apex mehr oder weniger — doch nicht über 90° — entfernte Elongationszone und zwar ziemlich genau in jene, für welche $E' = \arcsin\frac{c_1}{u}$ wird. Die Zone grösster Verdichtung wird sich daher umsomehr vom Apex entfernen, je mehr c_1 sich u nähert, wobei zugleich die Quantität der Verdichtung sich vermindert.

Ich führe hier beispielsweise einige Zahlenwerthe zur Erläuterung an, welchen die Hypothese $u=0\cdot25$ oder rund 1 geogr. M. zu Grunde liegt. Nach den neueren Erfahrungen dürfte u vielleicht näher an $\frac{1}{4}$ als an $\frac{1}{2}$ zu suchen sein, den letzteren Werth aber kaum wesentlich übersteigen. Im Übrigen sind die folgenden Zahlen Coëfficienten der Constanten k, welche aber hiebei nicht weiter in Frage kommt.

$u = 0\cdot25$ (1 g. M.).

$c: 0-0\cdot1$		$c: 0-0\cdot2$		$c: 0-0\cdot25$		$c: 0\cdot1-0\cdot2$		$c: 0\cdot1-0\cdot25$		$c: 0\cdot2-0\cdot25$	
E'	D	E'	D	E'	D	E'	D	E'	D	E'	D
0°	∞	0°	∞	0°	∞	0°	10·4	0°	12·5	0°	2·0
5	127·8	5	138·5	5	140·6	5	10·7	5	12·8	5	2·1
10	53·3	10	64·2	10	66·4	10	11·0	10	13·2	10	2·2
20	13·3	20	27·3	20	29·5	20	13·9	20	16·2	20	2·3
23·5	0·0	30	14·7	30	17·2	30	14·7	30	17·2	30	2·5
Null		40	8·1	40	11·1	40	8·1	40	11·1	40	3·0
für $E' \geqq 23\cdot5°$		50	2·1	50	7.4	50	2·1	50	7·4	50	5·3
		53·1	0·0	60	4·9	53·1	0·0	60	4·9	60	4·9
		Null		70	3·0	Maximum		70	3·0	70	3·0
		für $E' \geqq 53\cdot1°$		80	1·4	in $E'=23\cdot5°$		80	1·4	80	1·4
				90	0·0	Null		90	0·0	90	0·0
				Null		für $E' \geqq 53\cdot1°$		Maximum		Maximum	
				für $E' \geqq 90°$				in $E'=23\cdot5°$		in $E'=53\cdot1°$	
								Null		Null	
								für $E' \geqq 90°$		für $E' \geqq 90°$	

Wir untersuchen nun die zweite Möglichkeit, nämlich $c \geqq u$. Bei dieser Annahme schneidet der Strahl aus A den um B gezogenen Kreis nur in einem Punkte. Das zweite Zeichen vor der Wurzel in dem Ausdrucke für v und der zugehörige Werth v' kommen also nicht mehr in Betracht. Daher wird $\frac{dD}{dc} = \frac{d\Delta}{dc}$ und es ist somit auszuführen:

II.)
$$\overset{c_2}{\underset{c_1}{D}} = \frac{k}{2}(2+u^2\cos 2E')\int_{c_1}^{c_2}\frac{dc}{c\sqrt{c^2-u^2\sin^2 E'}} + \frac{k}{2}\int_{c_1}^{c_2}\frac{c\,dc}{\sqrt{c^2-u^2\sin^2 E'}} + ku\cos E'\int_{c_1}^{c_2}\frac{dc}{c}.$$

Die beiden ersten Theile sind in allgemeiner Form die Hälfte der analogen Ausdrücke im vorigen Falle. Mit der dort gewählten Bezeichnung erhält man daher:

V.)
$$\overset{c_2}{\underset{c_1}{D}} = \frac{k}{2}\left[P-(2+u^2\cos 2E')\,R+2u\cos E'.\ \log\text{nat.}\ \frac{c_2}{c_1}\right]$$

[1] Diese Beziehungen habe ich in Nr. 3224 der Astron. Nachrichten eingehender erörtert.

Beim Gebrauche ist zu beachten, dass die Vorzeichen von $\sqrt{c^2-u^2\sin^2 E'}$ — im vorliegenden Falle kommt nur das positive in Betracht — schon berücksichtigt sind, so dass diese Grösse also stets zeichenlos einzusetzen ist, auch dann, wenn sie durch Reduction in anderer Form erscheint. So ist z. B., wenn $c=u$ und $\sqrt{c^2-u^2\sin^2 E'}=u\cos E'$ genommen wird, auch wenn $E'>90°$, nur der Zahlenwerth von $\cos E'$ zu nehmen. Aus demselben Grunde ist, wenn E' im zweiten Quadranten liegt, für $\operatorname{arc}\sin\left(\frac{c\sin E'}{u}\right)$ nicht E', sondern $\pi-E'$ einzusetzen. Es gilt also, um Irrungen zu vermeiden, überhaupt für

$$E'>90°$$

$$\text{10a)}\quad \begin{cases} P=\sqrt{c_2{}^2-u^2\sin^2(\pi-E')}-\sqrt{c_1{}^2-u^2\sin^2(\pi-E')} \\ R=\dfrac{1}{u\sin E'}\left[\operatorname{arc}\sin\left(\dfrac{u\sin(\pi-E')}{c_2}\right)-\operatorname{arc}\sin\left(\dfrac{u\sin(\pi-E')}{c_1}\right)\right] \end{cases}$$

Es geht daraus hervor, dass sowohl P als R für $180°-E'$ dieselben Werthe wie für E' erhalten. Der Einfluss auf D liegt also nur im dritten, mit $\cos E'$ multiplicirten Gliede, welches mit diesem auch das Vorzeichen ändert. Die Dichtigkeitsdifferenz zwischen Apex und Antiapex ist daher $2ku\log\operatorname{nat}.\frac{c_2}{c_1}$.

Will man die Dichtigkeit für alle c, welche u übersteigen, so ist $c_1=u$, daher für die Elongationen $E'\leqq 90°$:

$$\text{V.a)}\quad \overset{c_2}{\underset{u}{D}}=\frac{k}{2}\left\{\sqrt{c_2{}^2-u^2\sin^2 E'}-u\cos E'-\frac{2+u^2\cos 2E'}{u\sin E'}\left[\operatorname{arc}\sin\left(\frac{u\sin E'}{c_2}\right)-E'\right]+2u\cos E'\log\operatorname{nat}.\frac{c_2}{u}\right\}$$

und für $E'\gtreqless 90°$

$$\text{V.b)}\quad \overset{c_2}{\underset{u}{D}}=\frac{k}{2}\left\{\sqrt{c_2{}^2-u^2\sin^2 E'}+u\cos E'-\frac{2+u^2\cos 2E'}{u\sin E'}\left[\operatorname{arc}\sin\left(\frac{u\sin(\pi-E')}{c_2}\right)-(\pi-E')\right]+2u\cos E'\log\operatorname{nat}.\frac{c_2}{u}\right\}$$

Sollen endlich die Werthe der c von 0 bis zu einer beliebigen obern Grenze c_2 berücksichtigt werden, so ist zu diesen Gleichungen noch jene unter IV. c) hinzuzulegen, wodurch man $D_0^{c_2}$ erhält. Wird $u=0$ gedacht, so erscheint die Dichtigkeit für alle Werthe von E' constant, wie es sein muss.

Das Characteristische des durch die Ausdrücke unter V dargestellten Falles, in dem die untere Grenze den Werth u erreicht, während die obere ihn überschritten hat, oder da beide Grenzen über u hinausgehen, liegt darin, dass das Dichtigkeits-Maximum nicht mehr so stark hervortritt, als im vorigen Falle, wo $c<u$ angenommen war.

Im Übrigen sind die Beziehungen hier etwas complicirter. Je nach Umständen kann das Maximum in die Elongation $E'=90°$ oder in den Apex oder zwischen beide treffen, kann aber auch sich gewissermassen auf die ganze Hemisphäre des Apex verflachen. Dann wird die Dichtigkeit in derselben fast ganz gleichmässig sein, während sie in der anderen Hälfte, gegen den Antiapex hin, allmählig abnimmt. Diese Modificationen hängen mit der Annahme für die untere Grenze c_1 in folgender Weise zusammen:

a) Für $c_1=u$ trifft das Dichtigkeits-Maximum, wie auch die obere Grenze $c_2>u$ beschaffen sei, so lange sie endlich bleibt, stets in die Elongation $E'=90°$. Am Apex und Antiapex befinden sich dann zwei Minima, von welchen jenes das grössere ist. Dieses gilt ungefähr auch dann noch, wenn c_1 etwas kleiner oder grösser als u ist, wobei das Maximum von 90° wieder mehr oder minder gegen 0 zurückrückt.

b) Nimmt man jedoch c_1 erheblich grösser als u, so trifft das Maximum wieder in den Apex, allein es ist quantitativ nur schwach ausgebildet.

c) Zwischen *a)* und *b)* giebt es stets Grenzfälle, in welchen auf der Hemisphäre des Apex eine fast völlige Ausgleichung entsteht. Für jede noch wahrscheinliche obere Grenze c_2 kann immer eine conjugirte untere Grenze c_1 gefunden werden, welche einen solchen Zustand ergibt.

d) Wäre aber $c_1 < u$, so würden die im vorigen Falle erörterten starken Maxima zwischen 0 und 90° hervortreten.

Es folgen nun wieder einige Zahlenbeispiele, welche geeignet sein dürften, das hier Gesagte zu erläutern.

$$u = 0\cdot25$$

Untere Grenze durchweg $c_1 = u = 0\cdot25$

Obere Grenze	c_2: 0·3	0·4	0·5	0·6	0·9	1·0	2·0
E'	*D*	*D*	*D*	*D*	*D*	*D*	*D*
0°	0·76	1·74	2·36	2·80	3·62	3·82	5·00
10	0·77	1·75	2·37	2·81	3·64	3·83	5·01
20	0·79	1·79	2·41	2·86	3·67	3·86	5·04
30	0·83	1·86	2·48	2·92	3·74	3·92	5·09
40	0·90	1·96	2·59	3·03	3·84	4·02	5·17
50	1·00	2 11	2·75	3·19	3·98	4·16	5·28
60	1·16	2·33	2·97	3·41	4·19	4·37	5·46
70	1·40	2·63	3·28	3·71	4·48	4·65	5·70
80	1·78	3·05	3·70	4·13	4·88	5·05	6·08
90	2·35	3·63	4·27	4·70	5·43	5·59	6·59
100	1·76	3·01	3·64	4·05	4·77	4·93	5·90
110	1·37	2·55	3·16	3·56	4·26	4·41	5·35
120	1·11	2·21	2·80	3·19	3·87	4·02	4·94
130	0·94	1·96	2·53	2·91	3·57	3·72	4·61
140	0·83	1·78	2·33	2·70	3·35	3·49	4·37
150	0·75	1·65	2·19	2·54	3·18	3·32	4·19
160	0·70	1·56	2·09	2·44	3·07	3·21	4·06
170	0·68	1·52	2·04	2·38	3·01	3·14	3·99
180	0·67	1·50	2·01	2·36	2·98	3·12	3·97

Durch Bildung der Differenzen je zweier auf einer Zeile stehenden Zahlen erhält man dann beispielsweise:

	c: 0·3–0·4	0·4 0·5	0·5–0·6	0·4–1·0	0·3–2·0
E'	*D*	*D*	*D*	*D*	*D*
0°	0·98	0·62	0·44	2·08	4·24
10	0·98	0·62	0·44	2·08	4·24
20	1·00	0·62	0·44	2·07	4·25
30	1·03	0·62	0·44	2·06	4·26
40	1·06	0·63	0·44	2·06	4·27
50	1·11	0·64	0·44	2·05	4·28
60	1·17	0·65	0·44	2·04	4·30
70	1·23	0·65	0·43	2·02	4·30
80	1·27	0·65	0·43	2·00	4·30
90	1·28	0·64	0·43	1·96	4·24
100	1·25	0·63	0·41	1·92	4·14
110	1·18	0·61	0·40	1·86	3·98
120	1·10	0·59	0·39	1·81	3.83
130	1·02	0·57	0·38	1·76	3·67
140	0·95	0·55	0·37	1·71	3·54
150	0·90	0·54	0·35	1·67	3·44
160	0·86	0·53	0·35	1·65	3·36
170	0·84	0·52	0.34	1·62	3·31
180	0·83	0·51	0·34	1·62	3·30

Diesen Zahlen liegt durchaus dieselbe und auch die gleiche Einheit zu Grunde, wie jenen im vorigen Beispiele.

Man kann daher die zur selben Elongation (E') gehörigen Werthe voneinander abziehen, oder — in der zweiten Gruppe — addiren, um Combinationen für andere Grenzen zu erhalten. In jeder einzelnen Colonne wäre allerdings die Übersicht erhöht, wenn als Einheit die jeweilige mittlere Dichte gewählt würde, wobei aber die früher erwähnte Beziehung verloren ginge, weil dann jeder Hypothese eine andere Einheit entspräche. Aus diesem Grunde, und da es doch sehr leicht ist die betreffende Umformung vorzunehmen oder auf graphischem Wege den Überblick zu erleichtern, glaube ich auf diese Art der Darstellung im Einzelnen verzichten zu dürfen, dagegen mag vielleicht folgende Ergänzung der ersten Zahlengruppe ($c_1 = 0·25$) nicht unwillkommen sein:

c_2:	0·3	0·4	0·5	0·6	0·9	1·0	2·0
Mittlere Dichte in der Hemisphäre des Apex	1·17	2·29	2·92	3·36	4·15	4·33	5·44
„ „ „ „ „ „ Antiapex . . .	1·12	2·14	2·70	3·08	3·75	3·89	4·80
Unterschied .	0·05	0·15	0·22	0·28	0·40	0·44	0.64
In Procenten der durchschnittlichen Dichte	4·4	6·7	7·8	8·7	10·1	10·7	12·5
Dichtigkeitsverhältnisse in $E' = 90°$	1	1	1	1	1	1	1
„ zu $E' = 0°$	0·32	0·48	0.55	0·60	0·67	0·68	0·76
„ und $E' = 180°$	0·29	0·41	0·47	0·50	0·55	0·56	0·60

Die vorstehenden Daten zeigen u. A., dass der mittlere Dichtigkeitsunterschied in den beiden Hemisphären, deren Pole der Apex und Antiapex sind, sehr geringfügig und selbst für die weitest angeführten Grenzen, wo er 12·5 Procent beträgr, noch unerheblich ist. Auch ist zu erkennen, dass das Maximum in $E' = 90°$ gegenüber den beiden Minima am Apex und Antiapex für die höheren Grenzwerthe nur unbedeutend hervortritt.

Noch bemerkenswerther sind die Resultate der zweiten Zahlengruppe, in welcher für die untere Grenze c_1 nicht mehr u, sondern irgend eine darüber hinausgehende Grösse gilt. Diese Voraussetzung ist viel allgemeiner als jener besondere Fall.

Hier stellt sich nun die vorhin erwähnte Thatsache deutlich heraus, dass, solange beide Grenzwerthe noch nicht viel von u abweichen (wie z. B. in den Zahlenreihen für c: 0·3—0·4 und 0·4—0·5), das Maximum noch immer in der Nähe von 90° liegt, während dasselbe für die weiter davon entfernten (z. B. schon für 0·5—0·6, aber viel deutlicher für c: 1·0—2·0, welche Differenzen aus den letzten zwei Spalten der ersten Gruppe gebildet werden können) wieder an den Apex heranrückt. Wenn man nun eine in der Nähe von u liegende mit einer hohen Grenze verbindet, so kann der eine oder andere Fall oder auch eine gewisse Ausgleichung eintreten. Beispiele dafür bieten die Zahlen in den letzten zwei Spalten für c: 0·4 — 1·0 und c: 0·3—2·0.

In der für unsere Beobachtungen besonders wichtigen Kugelhälfte zwischen 0° und 90° sind dort die Differenzen im Vergleiche mit den absoluten Werthen nur mehr verschwindend klein. Während aber für die erstere Hypothese das Maximum in den Apex fällt, trifft es für die andere in die Elongation 70°. Keines der beiden Maxima kann jedoch irgend eine practische Bedeutung besitzen.

Bildet man in den letzterwähnten beiden Colonnen die durchschnittliche Abweichung der einzelnen Werthe von 0° bis 90° vom entsprechenden Mittel, so findet man, dass diese in der vorletzten nur 1·5 Procent und in der letzten gar nur $^1/_2$ Procent dieses Mittels beträgt. Man wird wohl gewiss nie daran denken, derart geringfügige Ungleichheiten durch Beobachtungen nachweisen zu wollen. Etwas merklicher tritt der Unterschied der mittleren Dichten beider Kugelhälften hervor, welcher rund 15 Procent des Gesammtdurchschnittes zu Gunsten der Hemisphären des Apex beträgt.

Wenn man auch nicht vergessen darf, dass diese Zahlen nur beispielsweise gelten können, schon wegen der hypothetischen Annahmen für u, so stehen sie hinsichtlich der Grenzen für c keineswegs ausser

aller Beziehung zur Erfahrung. Insbesondere die Grenzen in der letzten Spalte umfassen so ziemlich den grössten Theil des Bereiches der empirischen Werthbestimmung für bereits nachgewiesene Hyperbeln. Den Grenzen 0·3 und 2·0 für c entsprechen nämlich (für $u = 0·25$) als äusserste Werthe von v: 0·05 und 2·25. Mit Rücksicht auf die Gleichungen 1 sind dann die zugehörigen V (für $r = 1$): $\sqrt{2·0025}$ und $\sqrt{7·0625}$. Die untere Grenze ist aber offenbar den Parabeln noch so nahe, dass man den Unterschied durch Dauerschätzungen unmöglich nachweisen könnte, während die obere, entsprechend einer Geschwindigkeit von nahe $10\frac{1}{2}$ g. M., nicht selten bei stark ausgeprägten Hyperbeln beobachtet worden ist[1].

Will man endlich auch noch diejenigen Fälle einbeziehen, für welche der untere Grenzwerth $c_1 < u$ ist, so kann man die für diese Annahmen früher gegebenen Beispiele mit den gegenwärtigen direct verbinden, wobei sich dann unter Umständen sehr starke Verdichtungen zwischen 0 und 90° herausstellen.

Das Ergebniss dieser Erörterungen lässt sich nunmehr dahin zusammenfassen, dass die Erstreckung der Grenzen von c über u hinaus uns keine weitere Möglichkeit für die Existenz eines sehr erheblichen Dichtigkeits-Maximums in der Nähe des Sonnenapex ergeben hat. Diese bleibt vielmehr auf die schon früher betrachtete Annahme eingeschränkt, dass die untere Grenze der vorhandenen räumlichen Geschwindigkeiten wesentlich geringer, als jene des Sonnensystems sei, ja eigentlich nur einen kleinen Bruchtheil derselben betrage. —

Bei den vorstehenden Betrachtungen wurde angenommen, dass alle Werthe von c innerhalb der Grenzen c_1 und c_2 gleich wahrscheinlich seien, weshalb auch N mit der Constanten vereinigt worden ist. In welcher Weise N als von c oder E oder von beiden abhängig gedacht werden kann, ist den betreffenden vorhergegangenen Erörterungen zu entnehmen. Es soll nun die Hypothese $N = \gamma c^2$, welche früher in ihrer Bedeutung für eine besondere Geschwindigkeitsannahme schon berührt wurde, bezüglich ihres Einflusses auf die Gesammtheit der Erscheinung genauer untersucht werden.

Da jetzt zwar nicht mehr N, aber doch γ in die Constante einbezogen werden kann, so erhält man, indem der Ausdruck 9, welcher D, zunächst für $c < u$ gibt, mit c^2 multiplizirt wird:

12) $$\overset{c_2}{\underset{c_1}{D}} = k(2+u^2\cos 2E')\int_{c_1}^{c_2}\frac{c\,dc}{\sqrt{c^2-u^2\sin^2 E'}} + k\int_{c_1}^{c_2}\frac{c^3\,dc}{\sqrt{c^2-u^2\sin^2 E'}}$$

daher

VI. $$\overset{c_2}{\underset{c_1}{D}} = \frac{k}{3}\left[(6+3u^2-4u^2\sin^2 E')\,P + c_2{}^2\sqrt{c_2{}^2-u^2\sin^2 E'} - c_1{}^2\sqrt{c_1{}^2-u^2\sin^2 E'}\right]$$

Hierin erscheint kein Glied mehr, welches für $E' = 0$ unendlich würde. Setzt man $c_1 = 0$, $c_2 = u$, so ergibt sich nach einiger Reduction:

VIa. $$\overset{u}{\underset{0}{D}} = \frac{2k}{3}(3+u^2\cos^2 E')u\cos E'$$

Für $u = \frac{1}{4}$ erhält man beispielsweise:

$c_1 = 0 \quad c_2 = u = 0·25$

E'	D	E'	D
0°	0·51	50°	0·32
10	0·50	60	0·25
20	0·48	70	0·17
30	0·44	80	0·09
40	0·39	90	0·00

Auch hier ist die zu Grunde liegende Einheit wieder dieselbe wie früher, weshalb sich die Zahlenwerthe direct vergleichen lassen. Man könnte nun z. B. voraussetzen, dass das Gesetz $N = \gamma c^2$ nur für die

[1] Selbstverständlich soll durch diese Nebenbemerkung nichts anderes dargethan werden, als dass diese oder ähnliche Grenz-Annahmen nicht gegen die gewöhnlichen Erfahrungen verstossen. Positive Rückschlüsse aus der Art und Zahl der beobachteten auf die Grenzen der räumlichen Geschwindigkeiten sind nicht nebenher und nicht ohne Untersuchung des ganzen Gebietes der Erscheinung zulässig.

ganz kleinen Geschwindigkeiten gelte, während die grösseren unter einander gleich wahrscheinlich wären. Würde dann etwa angenommen, dass dieses Gesetz nur bis zur Grenze $c = u$ anzuwenden, darüber hinaus aber N bis zu irgend einer Grenze constant sei, so könnten, wenn beispielsweise c von 0 bis 1 in dieser Art genommen würde, die obigen Zahlen mit den zugehörigen des früheren Beispieles ($c_1 = u$, $c_2 = 1$) verbunden werden. Man würde dadurch folgende Verhältnisszahlen erhalten:

c: 0 bis 0·25 ($N = \gamma c^2$)		c: 0·25 — 1 (N const.)	
E'	D	E'	D
0°	4·33	90°	5·59
10	4·33	100	4·93
20	4·34	110	4·41
30	4·36	120	4·02
40	4·41	130	3·72
50	4·48	140	3·49
60	4·62	150	3·32
70	4·82	160	3·26
80	5·14	170	3·14
90	5·59	180	3·12

Es ist schon einmal erwähnt worden, dass zum Vergleiche mit unserem Beobachtungsmaterial die Elongationen, welche weit über 90° hinaus liegen, nur sehr wenig in Betracht kommen, wenn die gewöhnlichen Annahmen über den Apex der Sonnenbewegung nicht allzuviel von der Wahrheit abweichen. In vorliegendem Falle sind nun die Ungleichheiten der Vertheilung selbst noch bis über 120° hinaus äusserst gering, ja man kann sagen practisch unerheblich. Sie würden noch unbedeutender ausfallen, wenn man c_2 etwas kleiner als 1 annehmen wollte. Es hat jedoch vorläufig noch keinen Zweck, geringfügige Einzelnheiten weiter zu verfolgen.

Man könnte selbstverständlich die Hypothese $N = \gamma c^2$ auch noch für $c > u$, also für grössere Geschwindigkeiten gelten lassen, wodurch man mit Benützung des betreffenden Ausdruckes 11 erhällt:

$$13)\qquad \overset{c_2}{\underset{c_1}{D}} = \frac{k}{2}(2+u^2\cos 2E')\int_{c_1}^{c_2}\frac{c\,dc}{\sqrt{c^2-u^2\sin^2 E'}} + \frac{k}{2}\int_{c_1}^{c_2}\frac{c^3\,dc}{\sqrt{c^2-u^2\sin^2 E'}} + ku\cos E'\int_{c_1}^{c_2} c\,dc$$

$$\text{VII.} = \frac{k}{6}\left[(6+3u^2-4u^2\sin^2 E')\,P + c_2^{\,2}\sqrt{c_2^{\,2}-u^2\sin^2 E'} - c_1^{\,2}\sqrt{c_1^{\,2}-u^2\sin^2 E'}\right] + \frac{k}{2}u\cos E'(c_2^{\,2}-c_1^{\,2})$$

Für $c_1 = u$ ergibt sich

$$\text{VIIa.}\quad \overset{c_2}{\underset{u}{D}} = \frac{k}{6}\Big[(6+3u^2-4u^2\sin^2 E')\left(\sqrt{c_2^{\,2}-u^2\sin^2 E'} - u\cos E'\right) + c_2^{\,2}\sqrt{c_2^{\,2}-u^2\sin^2 E'} - u^3\cos E'\Big] + \\ + \frac{k}{2}u\cos E'(c_2^{\,2}-u^2)$$

Der in der obigen Klammer befindliche $\cos E'$ ist stets nur dem Werthe nach, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen für $E' > 90$ zu gebrauchen, wie dies schon früher angedeutet wurde.

Zur Veranschaulichung sollen auch für diese Hypothese einige Zahlen angeführt werden. Es wird jedoch genügen, sich dabei auf die Elongationen 0, 90° und 180° zu beschränken, weil, bei den geringen Unterschieden, die Zwischenwerthe immer mehr an Bedeutung verlieren.

Für $u = 0{\cdot}25$ erhält man:

	c: 0·25—0·30	c: 0·25—1·0	c: 0·25—2·0
E'	D	D	D
0°	0·07	1·06	3·6
90	0·17	1·12	3·3
180	0·06	0·82	2·6

Die Hypothese $N = \gamma c^2$ ist im vorigen Abschnitte, jedoch unter anderen Voraussetzungen, schon erörtert worden. Dort wurden noch unbegrenzte Werthe von c angenommen, und es ergab sich dann für jedes einzelne v ganz constante Dichte. Die gegenwärtige plausiblere Annahme begrenzter c liefert zwar, wie dies zu erwarten war, nicht genau dasselbe Resultat, allein der Unterschied ist, soferne es sich um Vergleiche mit empirischen Ergebnissen handelt, auch nicht bedeutend. Wenn man aber die Resultate der Voraussetzungen $N =$ Const. und $N = \gamma c^2$ für die kleinen Geschwindigkeiten von $c = 0$ bis $c = u$ mit einander vergleicht, so wird man finden, dass die Verschiedenheit eine ganz fundamentale ist. Man kann dieses wohl damit erklären, dass die zweite Hypothese sich bereits jener Annahme nähert, welche Geschwindigkeiten unter $c = u$, als nicht vorhanden, gänzlich ausschliesst.

Sobald man also die Geschwindigkeiten bis zum untersten, noch denkbaren Grenzwerthe zwar gelten lässt, jedoch annimmt, dass ihr Vorkommen ungefähr im quadratischen Verhältnisse ihrer Grösse steht, so müsste man, wie mir scheint, wohl die Hoffnung aufgeben, in der Ansammlung der Ausgangspuncte unferne des Sonnenapex die Spuren der Bewegung des Sonnensystems aufzufinden.

Schon im vorigen Abschnitte wurde erwähnt, dass diese oder eine ähnliche mit c rasch wachsende Wahrscheinlichkeitsfunction nicht derart angewendet werden kann, dass sie mit irgend einem Grenzwerthe c plötzlich abbricht. Allein es gilt auch hier das dort gesagte, dass sich an dem Resultate nur wenig ändert, wenn man diese Discontinuität durch die Wahl einer entsprechenden Function aufhebt, welche nach einem Maximum sich wieder dem Nullwerthe nähert. Es liegt in den Grundbeziehungen, welche im ersten Abschnitte erörtert worden sind, dass die grösseren Geschwindigkeiten nur mehr einen verhältnissmässig geringen Einfluss auf die Dichtigkeitsverhältnisse ausüben können. Daher ist es für das Wesen der Erscheinung auch ziemlich gleichgiltig, ob man die Wahrscheinlichkeit derselben unvermittelt oder allmählich auf Null reduzirt denkt.

Übrigens bleibt es nur eine etwas weitläufigere Wiederholung der gegenwärtigen Betrachtungen, wenn man das Ergebniss für beliebige andere Functionen untersuchen will. In der allgemeinen Form $N = \alpha + \beta c + \gamma c^2 + \ldots$ gibt die Wahl der Coefficienten und ihrer Vorzeichen hinlängliche Mittel hiezu, wenn man nicht noch weiter gehen wollte. So würde z. B. die Voraussetzung, dass N sowohl für $c = o$ als auch schon wieder für $c = 2$ Null werde und das Maximum für $c = 1$ erreicht, am einfachsten durch $N = 2c - c^2$ dargestellt werden u. s. w. Die Einführung dieser und ähnlicher Formen führt aber auf Ausdrücke, deren Integration ebenso leicht, als die der früher entwickelten ist. Es scheint mir jedoch nicht dem Zwecke der vorliegenden Arbeit zu entsprechen, auf derartige Einzelnheiten, welche keine wesentlich neuen Ergebnisse erkennen lassen, näher einzugehen. Wenn man den Versuch unternehmen wollte, durch den Vergleich mit den Beobachtungen die unbekannten Coefficienten der obigen Function empirisch abzuschätzen, so dürfte man nicht vergessen, dass als weitere Unbekannte die Grösse u und die Lage des Sonnenapex zu betrachten sind. Überdies ist schon wegen der Unvollständigkeit des Beobachtungsmateriales jeder derartige Versuch gegenwärtig aussichtslos. Durch Beschränkung auf die Betrachtung der wichtigsten allgemeinen Eigenthümlichkeiten wird man sich noch am ehesten vor Trugschlüssen bewahren können. Aus diesem Gesichtspunkte dürfte es gerechtfertigt erscheinen, die Erörterungen über den Einfluss der Geschwindigkeits-Hypothesen vorläufig nicht weiter auszudehnen.

Es lässt sich aber, wenn man eine allgemeine Übersicht erlangen will, nicht umgehen, diese Untersuchung noch weiter auf die Fälle zu erstrecken, wo nicht alle ursprünglichen Bewegungs-Richtungen gleich wahrscheinlich sind. Man hat also auf die Elongationen E der absoluten Bahnen zurückzugehen und $N = \varphi(E)$ zu nehmen. Wenn man von jeder Erfahrung absehen würde, könnte man in dieser Hinsicht selbstverständlich die denkbar verschiedensten Annahmen zu prüfen haben, doch liegt kein rechter Grund vor, über das gegenwärtige Bedürfniss hinauszugehen. Dieses erwächst aber aus der schon im Eingange angedeuteten Vorstellung, dass die absoluten Bewegungsrichtungen im Vergleiche zu jener des Sonnensystems möglicherweise häufiger im directen als im entgegengesetzten Sinne vertreten sind. Ungefähr würde eine solche Vertheilung der ursprünglichen Richtungen dargestellt werden durch $N = m - n \cos E$. Da N nicht negativ ausfallen kann, so muss $m \gtreqless n$ sein. Die grössten Verschiedenheiten

entstehen für $m=n$, also für $N=m\ (1-\cos E)$, und diesen Fall wollen wir etwas genauer betrachten. Er kann gewissermassen auch als Grenzfall angesehen werden, denn je grösser $\frac{m}{n}$ ist, desto mehr nähert sich die Vertheilung der Gleichförmigkeit, für welche verschiedene Annahmen bereits erörtert wurden. Bezüglich der Geschwindigkeit c kann man die früheren Hypothesen ebenfalls einbeziehen, d. h. man kann m constant, also gleiche Wahrscheinlichkeit für c gelten lassen, oder den Factor c^2 beifügen, oder irgend eine andere Function von c. Es soll hier vorläufig m als constant gelten. Nun ist E durch E' auszudrücken, wozu wir gebrauchen:

$$\text{14)} \qquad \cos E = \frac{1}{c}\left(-u \sin^2 E' \pm \cos E' \sqrt{c^2 - u^2 \sin^2 E'}\right)$$

Den beiden Werthen von E für dasselbe E' entsprechen mit Rücksicht auf das Doppelzeichen die zwei heliocentrischen Geschwindigkeiten aus den Gleichungen 4a.

Es können nun auch die beiden dort entwickelten Dichtigkeitsfunctionen benützt werden, wobei der Factor N mit der Substitution für cos E beizufügen ist. m kann mit der Constanten vereinigt bleiben. Auf diese Weise findet man:

$$\text{17)} \begin{cases} \dfrac{d\Delta}{dc} = K\left[1 + \dfrac{(u\cos E' + \sqrt{c^2 - u^2 \sin^2 E'})^2}{2}\right]\left[1 + \dfrac{1}{c}\left(u \sin^2 E' - \cos E' \sqrt{c^2 - u^2 \sin^2 E'}\right)\right] \dfrac{1}{c\sqrt{c^2 - u^2 \sin^2 E'}} \\ \dfrac{d\Delta'}{dc} = K\left[1 + \dfrac{(u\cos E' - \sqrt{c^2 - u^2 \sin^2 E'})^2}{2}\right]\left[1 + \dfrac{1}{c}\left(u \sin^2 E' + \cos E' \sqrt{c^2 - u^2 \sin^2 E'}\right)\right] \dfrac{1}{c\sqrt{c^2 - u^2 \sin^2 E'}} \end{cases}$$

Die Summe gibt: $\frac{dD}{dc}$.

Wird gesetzt:

$$\text{18)} \begin{cases} \dfrac{\sqrt{c_2^2 - u^2 \sin^2 E'}}{c_2} - \dfrac{\sqrt{c_1^2 - u^2 \sin^2 E'}}{c_1} = Q \\ \text{log nat.} \dfrac{c_2 + \sqrt{c_2^2 - u^2 \sin^2 E'}}{c_1 + \sqrt{c_1^2 - u^2 \sin^2 E'}} = S \end{cases}$$

so erhält man

$$\text{VIII.} \qquad \overset{c_2}{\underset{c_1}{D}} = K\left[P + \frac{2 + 3u^2 - 4u^2 \sin^2 E'}{u}\, Q - (2 + u^2 \cos 2E')\, R + u\,(1 - 3\cos^2 E')\, S\right]$$

P und R sind in den früheren Entwicklungen schon angegeben worden. Es ist auch hier, wie vordem, zu beachten, dass in allen Fällen hier $\sqrt{c^2 - u^2 \sin^2 E'}$ zeichenlos zu behandeln ist, da beide Vorzeichen schon besonders berücksichtigt sind, und dass sin E' niemals grösser als $\frac{c}{u}$ sein kann. Aus diesem Grunde muss für $c_1 = 0$ auch die ganze Wurzel Null werden. Für die untere Grenze 0 wird daher

$$\text{19)} \begin{cases} P_0 = \sqrt{c_2^2 - u^2 \sin^2 E'},\ Q_0 = \dfrac{P_0}{c_2} \\ R_0 = \dfrac{1}{u \sin E'}\left[\text{arc sin}\left(\dfrac{u \sin E'}{c_2}\right) - \dfrac{\pi}{2}\right] \\ S_0 = \text{log nat.} \dfrac{c_2 + \sqrt{c_2^2 - u^2 \sin^2 E'}}{u \sin E'} \end{cases}$$

Ist die obere Grenze $c_2 = u$, wobei die untere c_1 bleibt, so ist:

19a)
$$P_u = u \cos E' - \sqrt{c_1^2 - u^2 \sin^2 E'}$$
$$Q_u = \cos E' - \frac{\sqrt{c_1^2 - u^2 \sin^2 E'}}{c_1}$$
$$R_u = \frac{1}{u \sin E'}\left[E' - \arcsin\left(\frac{u \sin E'}{c_1}\right)\right]$$
$$S_u = \log \text{nat} \frac{u\,(1 + \cos E')}{c_1 + \sqrt{c_1^2 - u^2 \sin^2 E'}}$$

Endlich hat man für $c_1 = 0$, $c_2 = u$:

19b)
$$P_{0,u} = u \cos E',\ Q_{0,u} = \cos E'$$
$$R_{0,u} = \frac{1}{u \sin E'}\left(E' - \frac{\pi}{2}\right),\ S_{0,u} = \log \text{nat cotg.}\ \frac{E'}{2}.$$

Wenn man annimmt, dass die absolute Geschwindigkeit $c = 0$ als untere Grenze wirklich besteht, so wird für $E' = 0$, also am Apex, die Dichte auch ∞, wie für den gleichen Fall bei $N = \text{Const.}$, denn die mit R_0 und S_0 multiplicirten Glieder werden zwar beide mit entgegengesetztem Zeichen ∞, aber auch der bestimmte Werth für diese unbestimmte Form ist ∞.

Die Ausdrücke lassen einen directen Vergleich mit denjenigen für constante Richtungswahrscheinlichkeit zu, denn die Annahme N proportional $1 - \cos E$ ändert nicht die Gesammtzahl der vorhandenen Richtungen, sie überträgt nur einen Theil der rückläufigen in rechtläufige. Die Vergleichung des Ausdruckes VIII, den wir oben für $\overset{c_2}{\underset{c_1}{D}}$ erhalten haben, mit jenem, welcher früher für die Annahme constanter N entwickelt worden ist (Gl. IV), zeigt, dass, solange $c < u$, die absoluten Werthe der Dichtigkeit, also auch die Mengen der in unsere Beobachtungssphäre gelangenden Körper grösser werden, wenn die directen Richtungen vorherrschen, als wenn alle Richtungen gleich wahrscheinlich sind. In der obigen Gleichung sind die Glieder mit P und R ganz identisch mit denjenigen, welche in der Gleichung IV den ganzen Ausdruck darstellen. Hier kommen noch die Glieder mit Q und S hinzu. Von diesen beiden bleibt zwar das zweite zumeist negativ, ist aber sehr erheblich kleiner als das erstere, weshalb immer eine Vermehrung stattfindet. Diese Thatsache hängt innig zusammen mit der erhöhten Wahrscheinlichkeit kleiner Periheldistanzen bei verminderter Anfangsgeschwindigkeit. Wir haben oben gesehen, dass die in der Elongation E' verdichteten Bahnen immer solche mit zweierlei Geschwindigkeiten v und v' sind, für jedes c, und die ganze Dichte setzt sich aus Δ und Δ' zusammen. Indem nun die Anzahl der zwischen $E = 90°$ bis $E = 180°$ befindlichen Richtungen auf Kosten jener zwischen 0 und 90° vermehrt wird, nimmt Δ' zu und Δ ab. Da aber die Geschwindigkeit v', welche Δ' entspricht, die kleinere ist, so sind nun mehr Bahnen von der Art vorhanden, welchen eine kleinere Periheldistanz zukömmt.

Für $c > u$ gilt nur die Geschwindigkeit v und die Dichte $\frac{d\Delta}{dc}$, welche nach vorgenommener Integration also wieder D giebt. Diese liefert, mit den früher gewählten Bezeichnungen folgendes Resultat:

IX.
$$\overset{c_2}{\underset{c_1}{D}} = \frac{K}{2}\Bigg\{P + \frac{2 + 3u^2 - 4u^2 \sin^2 E'}{u} \cdot Q - (2 + u^2 \cos 2E')\,R + u\,(1 - 3\cos^2 E')\,S$$
$$- \left[c_2 - c_1 - 2u \log \text{nat.} \frac{c_2}{c_1} - (2 + u^2 \cos 2E')\left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1}\right)\right] \cos E'\Bigg\}$$

Der erste Theil in der Klammer, welcher mit dem vorigen identisch ist, gibt je für E' und $180 - E'$ gleiche Werthe. Der zweite, welcher die von $\cos E'$ abhängigen Glieder enthält, gibt dagegen die betreffenden Ungleichheiten. Die Dichtigkeitswerthe für den Apex und Antiapex unterscheiden sich um den doppelten Betrag des in der eckigen Klammer befindlichen Ausdruckes, und da dieser Zahlenwerth für $E' = 0$ abgezogen, für $E' = 180°$ addirt wird, so ist nun die Dichtigkeit am Antiapex grösser als am

Apex. Ja, man kann sich noch bestimmter ausdrücken: Setzt man in den Gliedern, welche P, Q, R und S enthalten, $E'=0$, so wird dieser Theil genau gleich dem zweiten für dieselbe Substitution, nur das Vorzeichen bleibt das entgegengesetzte. Also ist für $E'=0$ (Sonnenapex) $\overset{c_2}{\underset{c_1}{D}}=0$, und dieses ist ein sehr wesentlicher Unterschied gegenüber dem analogen Falle bei gleichmässiger Richtungswahrscheinlichkeit.

Es sollen nun hier ebenfalls einige Zahlenbeispiele angeführt werden, und zwar für die Grenzen 0 bis u, dann die besonders charakteristischen Fälle, wenn beide Grenzen sehr nahe an u liegen, da der weitere Verlauf für die ganz grossen Geschwindigkeiten ohnehin leicht zu erkennen ist. Zum Vergleiche wurde überall auch das Schema für gleiche Richtungs-Wahrscheinlichkeit, hier mit $N=m$ (Const.) bezeichnet, beigesetzt.

$u=0\cdot25$

	$c:0-0\cdot25$			$c:0\cdot2-0\cdot25$			$c:0\cdot25-0\cdot3$			$c:0\cdot2-0\cdot3$	
	$N=m$	$N=m(1-\cos E)$	$N=m$		$N=m(1-\cos E)$	$N=m$		$N=m(1-\cos E)$	$N=m$		$N=m(1-\cos E)$
E'	D	D	E'	D	D	E'	D	D	E'	D	D
0°	∞	∞	0°	2·0	2·0	0°	0·8	0·0	0°	2·8	2·0
5	140·6	147·8	10	2·1	2·2	10	0·8	0·1	10	3·0	2·3
10	66·5	73·9	20	2·3	2·4	20	0·8	0·2	20	3·1	2·6
20	29·5	36·9	30	2·5	2·9	30	0·8	0·4	30	3·3	3·3
30	17·2	24·2	40	3·0	4·2	40	0·9	0·7	40	3·9	4·9
40	11·1	17·3	50	5·3	12·0	50	1·0	1·1	50	6·3	13·1
50	7·9	12·6	60	4·9	9·3	60	1·2	1·6	60	6·1	10·9
60	4·9	8·9	70	3·0	6·2	70	1·4	2·3	70	4·4	8·5
70	3·0	5·8	80	1·4	3·1	80	1·8	3·3	80	3·2	6·4
80	1·4	2·8	90	0·0	0·0	90	2·4	4·6	90	2·4	4·6
90	0·0	0·0				100	1·8	3·5	100	1·8	3·5
						110	1·4	2·8	110	1·4	2·8
						120	1·1	2·2	120	1·1	2·2
						130	0·9	1·9	130	1·0	1·9
						140	0·8	1·7	140	0·8	1·7
						150	0·8	1·5	150	0·8	1·5
						160	0·7	1·4	160	0·7	1·4
						170	0·7	1·4	170	0·7	1·4
						180	0·7	1·3	180	0·7	1·3

Man kann diesen Beispielen entnehmen, dass, so lange blos Geschwindigkeiten, welche kleiner als u sind, ins Auge gefasst werden, der Erfolg beider Hypothesen nicht wesentlich verschieden ausfällt. Nimmt man alle Geschwindigkeiten von 0 bis u zusammen, so ergiebt sich bei der hier angenommenen Form grösserer Wahrscheinlichkeit directer Bewegung — nämlich für $N=m\,(1-\cos E)$ — nur ein Mehrbetrag der Dichtigkeit, welcher in der Nähe des Apex relativ gering, in den weitern Elongationen aber, obgleich abnehmend, verhältnissmässig bedeutender ist. So ist z. B. für diese Hypothese die Dichtigkeit zwischen 60° und 80° fast doppelt so gross als für $N=$ Const., obwohl sie für 90° ebenfalls Null wird. Die Bedeutung dieses absoluten Zuwachses ist vorhin schon aufgeklärt worden; die Hauptzüge des Vertheilungsgesetzes werden durch denselben kaum geändert, und nur fast unmerklich drückt sich der sehr bedeutende reale Unterschied beider Annahmen aus. Auch in dem zweiten Schema, welches die Verhältnisse innerhalb der viel engeren Grenzen von $0\cdot8u-u$ darstellt, zeigt sich nur ein stärkeres Hervortreten des Maximums bei $E'=\arcsin\frac{c}{u}$ (hier bei $E'=53°\,8'$).

Der eigenthümliche charakteristische Unterschied tritt erst für die Geschwindigkeiten $c \gtreqless u$ hervor, insbesondere dadurch, dass die Dichtigkeit am Apex Null und in den benachbarten Regionen sehr klein wird, und dass in Folge dessen, im Gegensatze zum Ergebnisse aller andern bisherigen Annahmen die

mittlere Dichtigkeit in der Hemisphäre des Apex g e r i n g e r ausfällt als in der entgegengesetzten, deren Pol der Antiapex ist. Also erst, wenn man über $c = u$ hinausgeht, spiegelt sich in der Anordnung der relativen Bahnen deutlich das Vorwalten der absoluten directen Richtungen.

Liegen die Geschwindigkeiten jedoch in einem Intervall, welches — wie im letzten Beispiele — bei $c_1 > 0 < u$ beginnt und in $c_2 > u$ endet, so kann die Dichtigkeit am Apex entweder grösser oder kleiner ausfallen als am Antiapex, je nach der Wahl der Grenzwerthe. In dem Beispiele, für welches die Grenzwerthe $u \mp 0 \cdot 2\, u$ sind, überwiegt noch die Verdichtung am Apex, was aber nicht mehr der Fall ist, wenn c_2 wesentlich grösser genommen wird, oder c_1 noch mehr an u heranrückt. Von dieser unteren Grenze hängt ferner die Lage des Maximums und damit auch das Verhältniss der durchschnittlichen Dichtigkeit beider Hemisphären ab. So lang $c_1 < u$ bleibt fällt jenes immer auf die Halbkugel des Apex; für $c_1 = u$ trifft es in den Trennungskreis $E' = 90°$, für $c_1 > u$ in die Hälfte des Antiapex und selbst auch an diesem Punkt.

So lässt also diese Annahme die grössten Mannigfaltigkeiten im Erfolge bei geringen Unterschieden in der Hypothese über die ursprünglichen Geschwindigkeiten zu. Denn, je nachdem man festsetzt, dass diese zwischen 0 und der Grösse der translatorischen Geschwindigkeit der Sonne gleich wahrscheinlich, oder erst ü b e r dieser Grenze vorhanden sind, wird die Dichte am Apex ∞ oder 0, am Antiapex aber, wenn nur der erstere Fall gesetzt wird 0, oder im zweiten Falle, zwar nicht ∞ für endliche c_1 aber sehr ansehnlich ausfallen können.

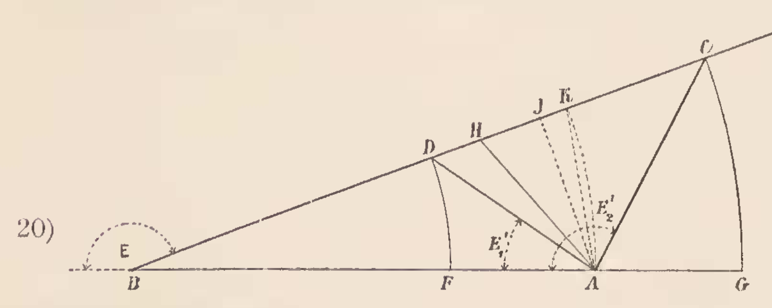
Die Voraussetzung $N = m\,(1 - \cos E)$ bildet gewissermaassen den Übergang zu jener für die ursprüngliche Bewegung der Cometen und cometarischen Meteorströme, wenn diesen ein ausserplanetarischer Ursprung zugeschrieben wird. Allein sie ist doch noch sehr verschieden, auch selbst dann, wenn damit — wie in dem letzten oben berechneten Beispiele — die Einschränkung verbunden wird, dass alle c sich nur wenig von u unterscheiden. Da nämlich nach dieser Hypothese auf jedes Element in der absoluten Elongation $E = 90°$ noch immer halb so viel ursprüngliche Richtungen entfallen als auf dasselbe in der Elongation $E = 180°$, ist die Anzahl der grösseren relativen Geschwindigkeiten von der Art, dass $v = u\sqrt{2}$, immer noch so bedeutend, die Anzahl der daraus hervorgehenden ausgeprägten Hyperbeln noch so gross, dass die typische Parabelform der Cometenbahnen dadurch nicht erklärt würde. Überdies würde, wie unser Beispiel zeigt, diese Hypothese eine sehr stark hervortretende Verdichtungszone der Aphele in einer gewissen Elongation vom Apex postuliren, welche der Erfahrung nach nicht, oder doch nicht in ähnlichem Grade besteht.

Die cometarische Hypothese erfordert daher die Annahme einer Function für N, durch welche die Übereinstimmung der ursprünglichen Bewegungselemente mit jenen der Sonne noch v i e l s t ä r k e r hervortritt. Um diesen Betrachtungen jedoch nicht eine über den vorliegenden Zweck weit hinausgehende Ausdehnung zu geben, soll nur noch die Annahme untersucht werden, dass E n i c h t u n t e r einem Grenzwerthe E, welcher nicht weit von 180° gedacht werde, durch Bahnen vertreten sei, dass aber zwischen E und 180° die Richtungs- und Geschwindigkeitswahrscheinlichkeiten, letztere zwischen engen Grenzen, gleich wären. Es wird also N von 0 bis E als Null, von E bis 180° als constant gesetzt. Die hierin liegende Discontinuität kann in der Hauptsache das Resultat nicht sehr beeinflussen, da auch eine continuirliche Function nahezu diesen Inhalt bekommen müsste.

Wir betrachten durch BC die Elongationsgrenze E, durch die beiden aus B mit den Halbmessern $BF = c_1$ und $BG = c_2$ beschriebenen Kreise die absoluten Geschwindigkeits-Grenzen bezeichnet. Die Rotation um $AB = u$ liefert die entsprechenden Raumgebilde[1].

[1] Fig. 3 stellt den Fall dar, dass u innerhalb c_1 und c_2, weshalb auch A zwischen den beiden entsprechenden Kreisperipherien liegt. Im Texte ist als selbstverständlich angenommen, dass man sie im Sinne der anderen Fälle jeweilig abändere, was sehr leicht ist. Sind c_1 und c_2 kleiner als u, wovon hier zunächst die Rede ist, so hat man A über G hin ausser die beiden Kreise, sind beide grösser als u, so ist A über F innerhalb dieselben zu verlegen. Übrigens ist noch der Grenzfall $c = u$ durch punktirte Linien angedeutet.

Die zu berücksichtigenden Richtungen liegen jetzt nur mehr in dem Kegelraume CBG. Der ganze übrige Theil kommt nicht mehr in Betracht. Mit einigen Abänderungen lassen sich nun die in den früheren Erörterungen gewonnenen Ausdrücke wieder verwenden. Denkt man sich A mit D und C verbunden, so entstehen zwei besondere Elongationswerthe E_1' und E_2', welche, wie leicht einzusehen, den Gleichungen



$$20)\qquad \frac{c_1}{u} = \frac{\sin E_1'}{\sin(\mathrm{E}-E_1')} \qquad \frac{c_2}{u} = \frac{\sin E_2'}{\sin(\mathrm{E}-E_2')}$$

entsprechen müssen, woraus

$$21)\qquad \operatorname{tang} E_1' = \frac{c_1 \sin \mathrm{E}}{u + c_1 \cos \mathrm{E}} \quad \text{und} \quad \operatorname{tang} E_2' = \frac{c_2 \sin \mathrm{E}}{u + c_2 \cos \mathrm{E}}.$$

folgen.

Die Dichtigkeitsverhältnisse zwischen 0 und E_1', E_1' und E_2', E_2' und 180° müssen abgesondert betrachtet werden.

Wir erörtern zuerst $c_1 < c_2 < u$. In dem Raume zwischen $E' = 0$ und $E' = E_1'$ tritt jetzt gegenüber dem allgemeinen Falle nur die Änderung ein, dass der zweite Einschnitt der innerhalb dieses Raumes aus A gezogenen Strahlen in die um B mit dem Halbmesser c gelegten Kugeln wegfällt. Hiemit entfällt auch in den Gleichungen 8) die Dichtigkeitsgrösse $\frac{d\Delta}{dc}$ und es bleibt nur $\frac{d\Delta'}{dc}$, wo Δ' sich auf v' bezieht. Wenn dieser Ausdruck entwickelt und integrirt wird, erhält man für jene Elongationen, welche zwischen 0 und E_1' liegen:

$$\text{Xa)}\qquad \overset{c_2}{\underset{c_1}{D}}(0, E_1') = \frac{k}{2}\left[P - \frac{2 + u^2 \cos 2E'}{u \sin E'} R - 2u \cos E' \log \text{nat.} \frac{c_2}{c_1}\right].$$

In dem Raume von E_1' bis E_2', welcher also dem Kegeltheile DAC entspricht, ist nun die untere Grenze nicht mehr c_1, sondern für jede Elongation veränderlich, allgemein

$$BH = \frac{u \sin E'}{\sin(\mathrm{E} - E')}.$$

Wird diese Grenze in Xa (also auch in P und R) für c_1 eingeführt, so ergibt sich für die Elongationen zwischen E_1' und E_2'

$$\text{Xb)}\qquad \overset{c_2}{\underset{c_1}{D}}(E_1', E_2') = \frac{k}{2}\Bigg\{\sqrt{c_2^2 - u^2 \sin^2 E'} + u \sin E' \operatorname{cotg}(\mathrm{E} - E') -$$
$$- \frac{2 + u^2 \cos 2E'}{u \sin E'}\left[\arcsin\left(\frac{u \sin E'}{c_2}\right) - \left(\pi - (\mathrm{E} - E')\right)\right]$$
$$- 2u \cos E' \log \text{nat.} \frac{c_2}{u} \frac{\sin(\mathrm{E} - E')}{\sin E'}\Bigg\}.$$

Hierin ist $\mathrm{E} - E' > 90°$, daher $\operatorname{cotg}(\mathrm{E} - E')$ stets negativ, wie dies auch aus P als nothwendig hervorgeht und ebenso $\pi - (\mathrm{E} - E')$ im ersten Quadranten. Für $E' = E_2'$ wird der ganze Ausdruck 0, welches der Annahme entspricht, weil in diesem Falle darüber hinaus keine Bahnen mehr vorkommen.

Wird die obere Grenze $c_2 = BJ = -u \cos \mathrm{E}$ genommen, so ist, nach der Gleichung für tang. E_2' die Elongation, bei welcher die Dichte 0 wird $E_2' = \mathrm{E} - 90°$. Ist dagegen $c_2 > -u \cos \mathrm{E}$, was immer dann der Fall sein wird, wenn die obere Grenze bis $c_2 = u = BK$ ausgedehnt werden soll, so darf man sich von der Elongationsgrenze $E' = \mathrm{E} - 90°$ angefangen nicht mehr des obigen Ausdruckes bedienen, weil von hier an

wieder der allgemeine Fall eintritt. Für die sehr enge Zone zwischen $E' = \mathrm{E} - 90$ und $E' = \frac{\mathrm{E}}{2}$ gilt dann wieder der Ausdruck IV, nämlich:

$$D = K\left[P - \frac{2+u^2\cos 2E'}{u\sin E'}R\right].$$

In P und R sind nun die beiden Grenzen $c_1 = u\sin E'$, daher

$$\sqrt{c_1^2 - u^2\sin^2 E'} = 0, \operatorname{arc}\sin\left(\frac{u\sin E'}{c_1}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad c_2 = \frac{u\sin E'}{\sin(\mathrm{E}-E')},$$

woraus

Xc)
$$D = K\left[u\sin E'\operatorname{cotg}(\mathrm{E}-E') - \frac{2+u^2\cos 2E'}{u\sin E'}\left(\mathrm{E} - E' - \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Die äusserste Elongation, bei welcher $D = 0$ wird, ist hier wieder durch $\sin E' = \frac{c_2}{u}$ bestimmt.

Wird endlich die obere Grenze bis zum äussersten $c_2 = u$ ausgedehnt, so sind die Integrationsgrenzen $c_1 = u\sin E'$ und $c_2 = u$, daher wird

Xd)
$$D = K\left[u\cos E' - \frac{2+u^2\cos 2E'}{u\sin E'}\left(E' - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

für E' zwischen $\frac{\mathrm{E}}{2}$ und 90° giltig. Für den letzteren Werth wird $D = o$.

Will man unter den gegebenen Annahmen die Dichtigkeitsverhältnisse für alle Elongationen von 0 bis 90° innerhalb der Geschwindigkeitsgrenzen c_1 und u bestimmen, so hat man zuerst E_1' und E_2' zu ermitteln, hierauf ist bis E_1' Formel a anzuwenden, welche jedoch wegen $c_2 = u$ dann auch in der besonderen Form geschrieben werden kann:

XIa)
$$\overset{u}{\underset{c_1}{D}}(0, E_1') = \frac{K}{2}\left\{u\cos E' - \sqrt{c_1^2 - u^2\sin^2 E'} - \frac{2+u^2\cos 2E'}{u\sin E'}\left[E' \operatorname{arc}\sin\left(\frac{u\sin E'}{c_1}\right)\right] - \right.$$
$$\left. - 2u\cos E' \log\operatorname{nat}\frac{u}{c_1}\right\},$$

hierauf gilt bis $E' = \mathrm{E} - 90°$ der Ausdruck XIb, welcher, ebenfalls wegen $c_2 = u$ die Form erhält:

XIb
$$\overset{u}{\underset{c_1}{D}}\big(E_1', (\mathrm{E} - 90°)\big) = \frac{K}{2}\left\{u\cos E' + u\sin E'\operatorname{cotg}(\mathrm{E}-E') + \frac{2+u^2\cos 2E'}{u\sin E'}(\pi - \mathrm{E})\right.$$
$$\left. - 2u\cos E'\log\operatorname{nat}.\frac{\sin(\mathrm{E}-E')}{\sin E'}\right\};$$

endlich gilt für die Elongationen zwischen $\mathrm{E} - 90$ und $\frac{\mathrm{E}}{2}$ Formel Xc und darüber hinaus Xd.

Nimmt man z. B. an, es wäre $\mathrm{E} = 170°$, und die Dichtigkeit für die Grenzen $c_1 = 0\cdot 2$ $u = 0\cdot 25$ zu rechnen, so ergibt sich zunächst $E_1' = 33\cdot 2°$, daher ist anzuwenden:

für E' von	0° — 33·2°	Ausdruck XIa
	33·2° — 80°	XIb
über	80° — 85°	Xc
»	85° — 90°	Xd.

Sind die Grenzwerthe der Geschwindigkeit $c > u$, so wird zunächst für jene äussersten Elongationen, welche zwischen E_2' und 180° liegen, an dem allgemeinen Ausdrucke V nichts geändert. Dagegen enthalten dann die Elongationen von 0 bis E_1' gar keine Bahnen. Eine besondere Betrachtung erfordert wieder nur der Raum zwischen E_1' und E_2'. Für diesen gelten nun offenbar wieder die Integrationsgrenzen c_1 und $\frac{u\sin E'}{\sin(\mathrm{E}-E')}$, so zwar, dass man erhält:

XII) $$D_{c_1}^{c_2}(E_1'\, E_2') = \frac{K}{2}\Big\{ u \sin E' \operatorname{cotg}(\mathrm{E}-E') - \sqrt{c_1^2 - u^2 \sin^2 E'} - \frac{2+u^2\cos 2E'}{u \sin E'}\left[(\mathrm{E}-E') - \arcsin\left(\frac{u \sin E'}{c_1}\right)\right] + 2u \cos E' \log \text{nat.} \frac{u \sin E'}{c_1 \sin(\mathrm{E}-E')}\Big\}$$

worin, wenn $\mathrm{E}-E' > 90°$ aus den schon mehrmals angeführten Gründen, die Ergänzung $180° - (\mathrm{E}-E')$ zu nehmen ist.

Soll nun die untere Grenze $c_1 = u$ sein, so findet man nach einiger Reduction für $E' < 90°$:

XIIa) $$\overset{c_2}{\underset{u}{D}}(E_1', E_2') = \frac{K}{2}\Big\{ u \frac{\sin(2E'-\mathrm{E})}{\sin(\mathrm{E}-E')} + \frac{2+u^2\cos 2E'}{u \sin E'}(2E'-\mathrm{E}) + 2u \cos E' \log \text{nat.} \frac{\sin E'}{\sin(\mathrm{E}-E')}\Big\}$$

Für $E' \lesseqgtr \frac{\mathrm{E}}{2}$ wird dieser Ausdruck Null, weil wegen $\tang E_1' = \frac{c_1 \sin \mathrm{E}}{u + c_1 \cos \mathrm{E}}$, bei der Substitution $c_1 = u$, $E_1' = \frac{\mathrm{E}}{2}$ als unterster Grenzwerth der Elongationen hervorgeht.

Dagegen für $E' > 90°$

XIIb) $$\overset{c_2}{\underset{u}{D}}(E_1', E_2') = \frac{K}{2}\Big\{ \frac{u \sin \mathrm{E}}{\sin(\mathrm{E}-E')} + \frac{2+u^2\cos 2E'}{u \sin E'}(\pi - \mathrm{E}) + 2u \cos E' \log \text{nat.} \frac{\sin E'}{\sin(\mathrm{E}-E')}\Big\}$$

Das folgende Beispiel wird einen Überblick der Verhältnisse gewähren.

Angenommen wurde $\mathrm{E} = 170°$, $u = 0\cdot25$

$c_1 = 0\cdot2$, $c_2 = 0\cdot3$.

E'	D	E'	D
0	1·00	90°	0·70
10	1·01	100	0·71
20	1·02	110	0·74
30	1·21	120	0·81
40	1·09	130	0·91
50	0·91	140	0·83
60	0·81	150	0·76
70	0·74	160	0·70
80	0·71	170	0·68
90	0·70	180	0·67

Die Vertheilung ist, wie man sieht, schon eine sehr gleichmässige, denn die durchschnittlichen Dichtigkeiten der beiden Hemisphären (Apex und Antiapex) verhalten sich ungefähr wie 5 : 4 und die Maxima (bei 33° und 131°) treten nur sehr wenig hervor.

Es ist leicht einzusehen, dass die Ungleichheiten noch geringer werden, wenn man die Annahme in diesem Sinne noch ein wenig modificirt. So würde z. B., wenn c_2 ein wenig grösser als 0·3 genommen würde, die mittlere Dichtigkeit zwischen 90° und 180° vergrössert, und wenn c_1 etwas grösser gesetzt würde, jene zwischen 0 und 90 verkleinert, so dass die Unterschiede noch viel weniger hervortreten würden. Dasselbe gilt auch hinsichtlich der Maxima, wenn E noch etwas näher an 180° genommen würde. Es ist jedoch so gut als gewiss, dass auch mit den Annahmen, welche dem Beispiele zu Grunde liegen, die gesetzmässige Ungleichheit in der Vertheilung der Aphele durch die Beobachtungen, welche uns bisher bekannt sind, nicht mehr nachweisbar wäre.

Ich habe damit nur zeigen wollen, dass unter Umständen, welche einen grossen Überschuss parabelähnlicher Bahnen nothwendig hervorgehen lassen müssen, kein wahrnehmbares Vertheilungsgesetz der Aphele gegen den Sonnenapex resultiren könnte, insbesondere weder eine bedeutende Verdichtung am Apex der Sonnenbewegung, wie die Einen meinen, noch eine solche in der Elongation 90°, wie Andere behaupten. Dabei wurde überdies die Übereinstimmung mit den Bewegungselementen des Sonnensystems

keineswegs in so engen Grenzen angenommen, welche etwa schon als sehr unwahrscheinlich gelten könnten.

Es sei schliesslich noch gestattet, die Resultate dieser Untersuchung übersichtlich zusammenzufassen.

1. Gelangen in die Attractionssphäre der Sonne Weltkörper von verschwindend kleiner Masse, deren ursprüngliche Bewegungsrichtungen entweder gleichmässig (zufällig) vertheilt oder nach einem Gesetze angeordnet waren, welches in Beziehung zur Bewegungsrichtung des Sonnensystems steht, so erscheinen die dabei hervorgehenden heliocentrischen Richtungen (bestimmt durch die Ausgangspunkte), für jene Bahnen, welche die Körper in unsere Beobachtungssphäre bringen können, derart vertheilt, dass im Allgemeinen ein Dichtigkeits-Maximum in irgend einem dem Apex der Sonnenbewegung entsprechenden Parallelkreise eintritt.

2. Im Falle allseits gleicher Wahrscheinlichkeit der ursprünglichen, absoluten Bewegungsrichtungen kann der Parallelkreis grösster Verdichtung bis zu 90°, aber nicht darüber, vom Apex entfernt sein.

3. Bei einer solchen Anordnung der ursprünglichen Richtungen, in welcher die gleichsinnige Bewegung mit der Sonne häufiger vertreten wäre als die entgegengesetzte, kann die grösste Verdichtung in jedem Abstande vom Apex der Sonne von 0 bis 180° liegen, und es sind dann auch zwei Maxima möglich.

4. In den Apex selbst könnte das Maximum nur in zwei von einander wesentlich verschiedenen Fällen treffen. Der eine Fall deckt sich mit der Annahme, dass die räumliche Geschwindigkeit dieser Körper im Vergleiche mit der Geschwindigkeit der Sonne eben so gut unendlich klein, als irgend eine andere sein könnte. Er ist streng genommen unendlich wenig und auch annähernd nicht sehr wahrscheinlich. Ein solches Maximum würde sehr bedeutend hervortreten und den Grenzwerth ∞ erhalten. Der andere Fall tritt ein, wenn angenommen wird, dass selbst die geringsten räumlichen Geschwindigkeiten erheblich grösser — z. B. etwa doppelt so gross — als jene des Sonnensystems sind. Gegen die Wahrscheinlichkeit desselben kann weder a priori noch aus der Erfahrung das Geringste eingewendet werden. Allein dieses Maximum ist quantitativ gänzlich unbedeutend und durch Beobachtungen kaum nachweisbar (siehe die letzten Beispiele S. 17 [465]).

5. In irgend einen Parallel zwischen 0 und 90° vom Apex fällt das Maximum ebenfalls unter sehr verschiedenen Umständen. Ist die unterste Grenze der Geschwindigkeiten c_1 zwar nicht 0 aber kleiner als die Geschwindigkeit der Sonne (u), so trifft dasselbe sehr genau in den Abstand $E' = \arcsin \frac{c_1}{u}$ und wird desto bedeutender, je kleiner c_1 ist. Die grösste Verdichtung kann jedoch umgekehrt auch wieder in eine solche Elongation treffen, wenn die untere Grenze u merklich übersteigt. Sie ist dann aber ganz unerheblich, so dass hiedurch auf der Hemisphäre des Apex fast völlige Gleichförmigkeit entsteht.

6. Das Dichtigkeits-Maximum würde desto genauer in den grössten Kreis, welcher 90° vom Apex und Antiapex absteht, fallen, je mehr die untere Grenze der Geschwindigkeiten mit u übereinstimmend wäre. Es entstehen dann zwei Minima, von welchen eines in den Apex, das andere in den Antiapex fällt. Ersteres ist ein wenig grösser als Letzteres, weshalb die Dichte in der Apex-Hemisphäre auch etwas grösser als in der entgegengesetzten ausfällt.

7. Im Allgemeinen kann man aussprechen, dass die Quantität des Maximums sich mit der Erhöhung der unteren Geschwindigkeits-Grenze rasch vermindert. Diejenige Grenze c_1, bei welcher die Amplitude der Extreme nur mehr schwach hervortritt, so zwar, dass die Vertheilung beiläufig, wenigstens auf der einen Hälfte, als gleichförmig gelten kann, entspricht ungefähr denjenigen absoluten Geschwindigkeiten auf welche aus den Beobachtungen grosser Meteore zu schliessen wäre, wenn die räumliche Geschwindigkeit der Sonne etwa zwischen 1 und 2 geogr. Meilen, und zwar näher dem ersteren Werthe, vorausgesetzt würde.

8. Für die besonderen Annahmen (3) über die Richtungs-Wahrscheinlichkeit, aus welchen ein sehr bedeutendes Überwiegen ganz kleiner heliocentrischer Anfangsgeschwindigkeiten (v nahe an Null), daher

auch ein erhebliches Vorwalten parabelähnlicher Bahnen (Cometen, cometarische Ströme) hervorgeht, wird die Vertheilung der Aphele in Bezug auf den Sonnenapex eine mehr oder weniger, im Grenzwerthe ganz gleichförmige.

9. Wenn die Wahrscheinlichkeit der räumlichen Geschwindigkeiten derart angenommen wird, dass sie, bis zu irgend einer Grenze, dem Quadrate der Geschwindigkeits-Grösse ungefähr proportional ist, so fallen die Dichtigkeits-Unterschiede äusserst gering aus, auch dann, wenn man vom Grenzwerthe 0 ausgeht, sobald die obere Grenze u übersteigt.

10. Da nun die verschiedensten Arten der Vertheilung, unter durchaus wahrscheinlichen Annahmen, möglich sind, könnte die Erfahrung, dass irgend ein besonderer Zustand durch Beobachtungsresultate nicht nachweisbar wäre, auch nicht das Geringste gegen die Voraussetzung des stellaren Ursprunges beweisen. Insbesondere ist es gänzlich unzulässig, daraus, dass in der Nähe des Ortes am Himmel, gegen welchen hin man die Bewegung der Sonne anzunehmen geneigt ist, keine namhafte Anhäufung von Ausgangspunkten (nicht Radianten) zu bemerken wäre, irgend einen Zweifel hinsichtlich der stellaren Abkunft dieser Körper abzuleiten, weil die erwähnte Erscheinung mit dieser Voraussetzung nicht im nothwendigen causalen Zusammenhange steht.

11. Die wahrscheinlichsten Annahmen über die ursprüngliche Vertheilung der Richtungen und Geschwindigkeiten führen allerdings zu dem Resultate, dass die durchschnittliche Dichte in der Anordnung der Ausgangspunkte auf der Hemisphäre des Apex etwas grösser ausfallen müsste, als auf der entgegengesetzten. Von vorneherein bleibt es dabei aber ungewiss, ob dieser Unterschied gross genug ist, um in dem gegenwärtig vorliegenden Beobachtungsmaterial zum Ausdrucke zu gelangen, ja, ob er durch derartige Beobachtungen überhaupt sicherzustellen wäre.

12. In der besprochenen Frage kann daher in letzter Linie nur ein positives, keineswegs aber ein negatives Ergebniss empirischer Untersuchungen entscheidend sein.